Martin Kramer (Hrsg.)

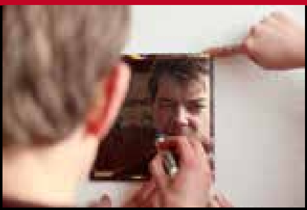
Geometrie und Stochastik als Abenteuer

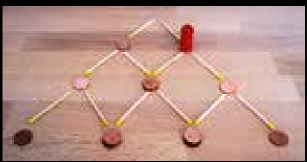
Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung

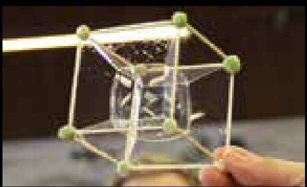
UNI FREIBURG

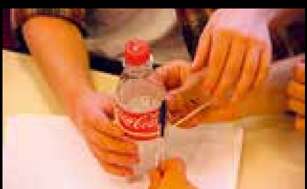
Lässt sich Unterricht als Abenteuer gestalten? Nicht nur in der Schule, sondern auch an der Universität, etwa in einer didaktischen Vorlesung? Ziel der im Sommersemester 2013 gehaltenen Vorlesung war es, an konkreten Beispielen exemplarisch zu zeigen und zu erleben, wie „Begreifen" und „Erkenntnis" nachhaltig, gehirngerecht und in einem gruppendynamischen Kontext möglich sind. So entstand das vorliegende Skript aus der Vorlesung heraus bzw. aus studentischer Feder.

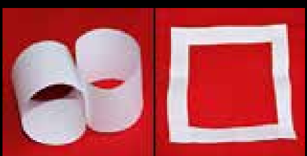
Ein konstruktivistisches Lernverständnis erfordert eine tiefgreifende Haltungsänderung. Es geht nicht um richtige oder falsche Methoden. Vielmehr geht es um situationsgerechtes Handeln in Übereinstimmung mit der eigenen (Lehrer-)Persönlichkeit: Was passt für mich? Was passt zur Situation? Es geht darum, Lehrer zu „werden", statt Lehrer zu „machen". Kurz: Es geht um Persönlichkeitsentwicklung.











Stimmen von Studierenden, die sich auf das Abenteuer eingelassen haben:

„Ich habe einen ganz neuen Zugang zur Mathematik gefunden und Methoden kennengelernt, die mir aus eigener Schulzeit nicht bekannt waren."

„Praxisnahe Vorlesung, man kann (sich) selbst erleben."

„Sehr gut gefallen haben mir die interaktiven Übungen, von denen mich einige in meinem Lehrerdasein begleiten werden."

Mathematisches Institut der Universität Freiburg
Abt. für Didaktik der Mathematik

Martin Kramer (Hrsg.)

Geometrie und Stochastik als Abenteuer

Martin Kramer (Hrsg.)

Geometrie und Stochastik als Abenteuer

Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung

Herausgeber:

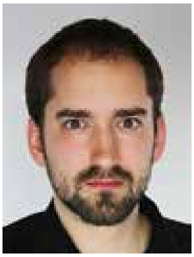
Martin Kramer, geb. 1973 in Esslingen am Neckar, Vater, Leiter der Abteilung für Didaktik der Mathematik an der Universität Freiburg, zahlreiche Publikationen, Lehrerfortbildungen zur professionellen Umsetzung einer handlungs- und erlebnisorientierten Didaktik, Theaterpädagoge (Bundesverband Theaterpädagogik), von 2003 bis 2012 Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik.

Tutorat und Mitarbeit:

Lisa Maria Müller

Die reinste Form des Wahnsinns ist es, alles beim Alten zu lassen und gleichzeitig zu hoffen, dass sich etwas ändert – Albert Einstein

An dem *Neuen*, was in unserer Fachdidaktik unter Herrn Kramer entsteht, so unmittelbar teilgehabt zu haben, war für meine Sicht auf die Mathematik, auf ihre Ästhetik und ihren Bildungswert prägend. Die vielen Sitzungen mit den Studenten, Tutoren und Herrn Kramer, aus denen die Endfassung dieses Textes Stück für Stück hervorging, gaben mir die Möglichkeit die Herangehensweise der erlebnispädagogischen Didaktik tiefer zu verstehen. Ich danke den Studenten für die offenen Diskussionen, den Tutoren für die vielen konstruktiven Anregungen und Herrn Kramer für die tolle Zusammenarbeit und die humorvolle Atmosphäre, in der es sich einfach gut „schaffe“ lässt.



Clemens Blank

Die Mitarbeit an diesem Band war für mich auf zweierlei Weise eine wertvolle Erfahrung. Während ich auf der einen Seite viel durch den Austausch und direkten Kontakt mit Herrn Kramer über seine Methoden der Fachdidaktik lernen durfte, konnte ich auf der anderen Seite in meiner doppelten Funktion als Student und Lektor den Umgang mit daraus entstehenden Rollenkonflikten erleben. Eine Situation, mit welcher sich Pädagogen zwangsläufig auseinandersetzen müssen und von welcher ich in meinem anschließenden Praxissemester stark profitieren durfte. Ich bedanke mich für die bereichernde und angenehme Zusammenarbeit, welche mir ein tieferes Verständnis für ein „abenteuerliches“ Unterrichten vermittelt hat.

Korrektorat: Barbara Schuler
Layout und Cover: Bernd Burkart; www.form-und-produktion.de

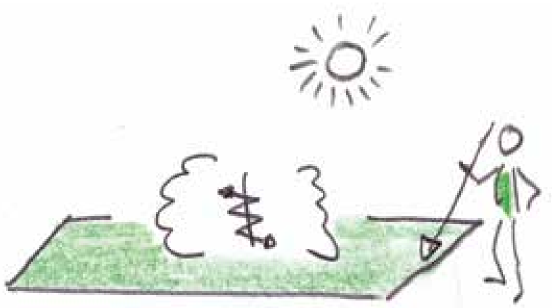
Vorwort

Wissen wächst

„Wie kommt Wissen in unser Gehirn?“ Eine zentrale Frage, möchte man meinen, vor allem, wenn man als Lehrer Schülern etwas beibringen möchte. Und doch erweist sich die naheliegende Frage (zunächst) als wenig hilfreich. In einem konstruktivistischen Sinne lautet die richtige Fragestellung: „Wie entsteht Wissen in unserem Gehirn?“

Das menschliche Gehirn ist etwas sehr Seltsames. Egal wohin Sie es „pflanzen“: Es passt sich an. Wären Sie in der Wüste geboren, Sie hätten andere Menschen, andere Tiere und vermutlich eine andere Sprache kennengelernt, kurz: Sie würden anders denken. Hätten Ihre Eltern Sie im Norden Finnlands geboren, würden Sie wiederum anders denken. Interessant: Ihr Denken passt sich der Umgebung an. Ich weiß zwar nicht, wie Sie das machen oder genauer: wie ihr Gehirn das macht, aber Sie tun es.

Die Grundidee besteht also nicht darin, das Gehirn direkt zu verändern, sondern dass wir es in eine geeignete Umgebung packen. Die Grundthese ist: Wissen kann man nicht erzwingen, es kann nur von selbst wachsen. Neurodidaktisch formuliert: Das Gehirn ist kein Datenspeicher, sondern ein Datengenerator. Nimmt man diese Aussage ernst, findet man sich als Lehrperson unmittelbar in einer neuen Rolle mit einer neuen Aufgabe konfrontiert: Es geht nicht darum, Wissen einzutrichtern, sondern das Wachstum optimal zu fördern.



Der Lehrer wird zum Gärtner, zum Gestalter einer Lernumgebung. Er wechselt vom „Beschulenden" zum „Strukturgeber" – eine völlig andere Arbeitsstelle am selben Arbeitsplatz. Nicht weniger als ein Paradigmenwechsel: Ein deterministisches Lernverständnis wird von einem konstruktivistischen abgelöst.

Universitäres Lehren

Lässt sich an einer Universität eine konstruktivistische und systemische Didaktik in einem handlungs- und erlebnisorientierten Kontext vermitteln? In einer Vorlesung? Das vorliegende im Sommersemester 2013 entstandene Skript zeigt mit vielen Beschreibungen und Bildern eine positive Antwort. Gerne darf es als Pilot bzw. als Möglichkeit für andere Universitäten und andere Fachrichtungen verstanden und nachgeahmt werden.[1]

Die Aufzeichnungen in diesem Skript stammen alle aus studentischen Federn und beschreiben exemplarisch handlungsorientierte Zugänge zu unterschiedlichen Themenfeldern. Ich schreibe bewusst „exemplarisch", da dieses Skript keinen vollständigen Katalog darstellen möchte, dessen Inhalte dann auf die beschriebene Weise im Unterricht umgesetzt werden sollen. Vielmehr wollen die unterschiedlichen Ideen und Darstellungen zum eigenen Experimentieren anstiften. Der Leser möge eigene Beispiele und Ideen entwickeln, Dinge verwerfen, andere hinzufügen – kurz: es zu seiner eigenen und zur Sache seiner Schüler machen.[2]

Man braucht nicht die Hattie-Studie zu zitieren, um zu wissen, dass die Lehrerpersönlichkeit bzw. die Lehrperson *der* entscheidende Faktor im Unterricht ist. Somit will dieses Skript keine Appelle und Vorschriften machen, wie „guter Unterricht" gelingen kann. Vielmehr möchte es den Möglichkeits- und Handlungsspielraum erweitern. „Guter Unterricht" existiert nicht losgelöst von Lehrperson und Schülern und muss für jede Klasse neu gedacht und gelebt werden. Es ergibt keinen Sinn, über Unterrichtsmethoden zu sprechen, ohne Lehrer- und Schülerpersönlichkeit mit einzubeziehen. Folglich wird Persönlichkeitsentwicklung als zentraler Wert gesehen. Es geht nicht um „richtigen" Unterricht, sondern um „stimmigen" Unterricht.

Wann wird Unterricht zum Abenteuer?

Abenteuer gibt es nicht im Buch, es kann nur mit Lehrer und Schülern im Unterricht entstehen bzw. erfahren werden. Aber wie entsteht das Abenteuer? Aus dem Zusammenspiel zweier Welten: der Welt des Fühlens, des Erlebens, des Wahrnehmens und

1 Das Skript vom Wintersemester 2012 „Analysis und Algebra als Abenteuer" kann ebenfalls auf der Homepage der Didaktik der Mathematik gratis heruntergeladen werden.

2 Der interessierte Leser, der weitere Beispiele kennenlernen will und einen tieferen didaktischen Einblick sucht, sei auf mein dreibändiges Werk „Mathematik als Abenteuer" (Aulis Verlag) verwiesen.

auf der anderen Seite der Welt des fachlichen Wissens, des Lernens. Letzteres bildet den Rahmen für einen Erlebnisraum.

Es braucht beides: Ohne Lernen verkommt das Erlebnis zur Bespaßung, ohne Erleben verkommt das Lernen zum fremdbestimmten Pauken. Handlungs- und erlebnisorientierte Didaktik möchte das (wieder) zusammenführen, was in natürlicher Weise zusammengehört.

Dank

Es steckt viel Arbeit von vielen Menschen in diesem Skript. Die einzelnen Abschnitte wurden meist in Vierergruppen von Studenten verfasst. Anschließend wurden sie von den Tutoren Stefanie Augenstein, Niklas Faupel, Sebastian Hillenbrand, Lisa Maria Müller und mir inhaltlich Korrektur gelesen, worauf die Verfasser fast immer die Änderungsvorschläge in ihren Text übernahmen. Lisa Maria Müller führte im zweiten Korrekturdurchlauf alle (!) Gespräche mit den einzelnen Gruppen durch und sammelte Bilder und Texte. Clemens Blank sortierte Inhalte, gliederte, korrigierte Satzbau und Grammatik und verfasste den Index. Frau Schuler unterstützte an vielen Stellen und trug manches zur besseren Verständlichkeit der Texte bei.

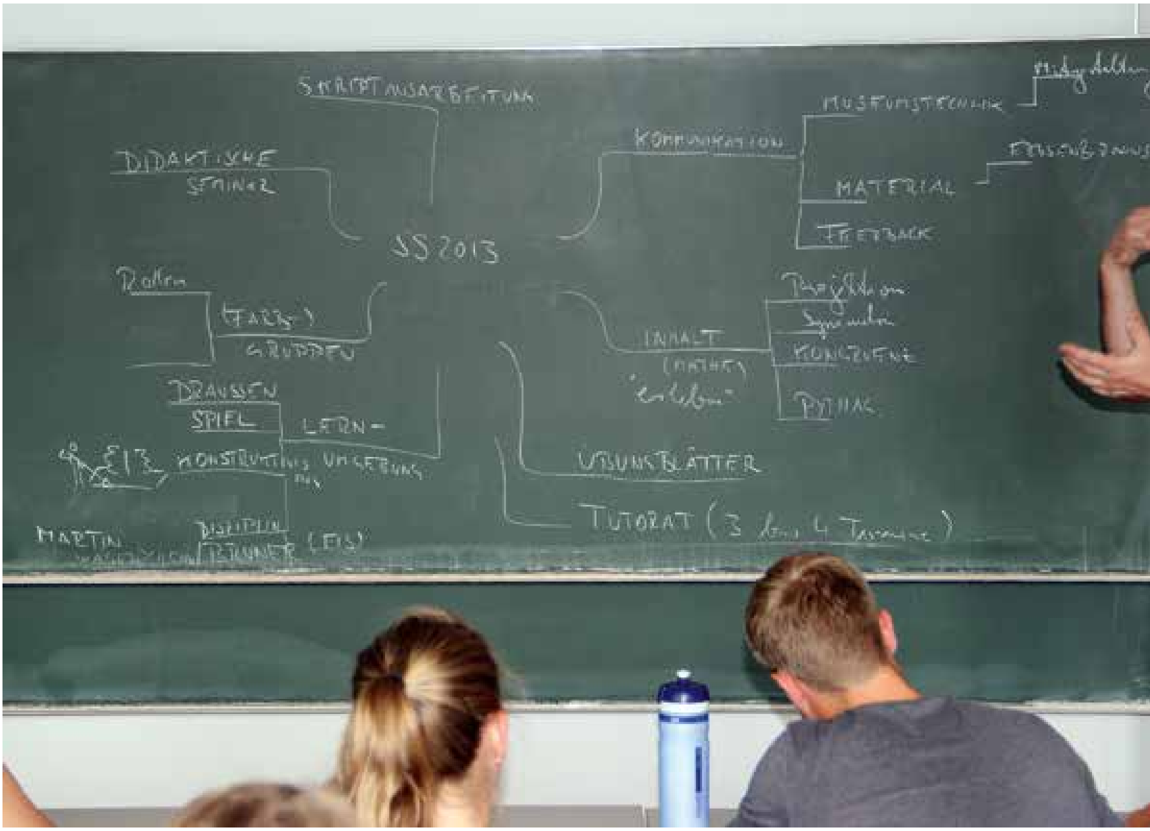
Ich möchte an dieser Stelle allen Beteiligten ganz herzlich zu diesem persönlichen Vorlesungsskript gratulieren und ihnen dafür danken. Möge es den Impuls zu dem einen oder anderen Abenteuer im Unterricht geben.

Martin Kramer

Download dieser Seiten als PDF unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/downloads.de.html

Inhalt

Pädagogik und Methodik



1 Kommunikation

1.1 Nonverbale Kommunikation

Viola Haueisen, Lars Schnee und Florian Heß

Definition

Unter nonverbaler Kommunikation versteht man jegliche Art von zwischenmenschlicher Kommunikation, welche ohne Worte stattfindet. Diese Art der Kommunikation kann sowohl unabsichtlich als auch bewusst und gewollt ablaufen.

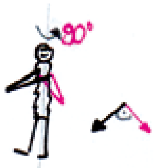
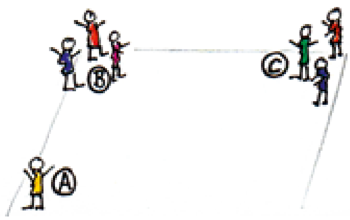
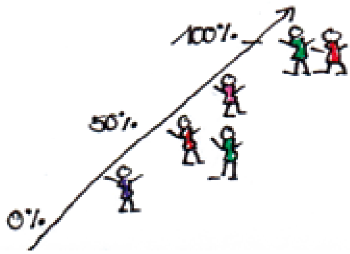
Arten nonverbaler Kommunikation

Die für den Unterricht interessante nonverbale Kommunikation wird in verschiedene Arten unterteilt. Diese unterscheiden sich vor allem in der Art des Einsatzes des eigenen Körpers oder geeigneter Hilfsmittel.

1. Körper / Körperhaltung
   Hierunter fallen alle Arten der nonverbalen Kommunikation, welche ausschließlich unter Zuhilfenahme des Körpers stattfinden. Zusätzlich zählt zu dieser Sparte auch diejenige Kommunikation, welche über den Bewegungsablauf einer Person geschieht.
2. Ortskodierung
   Zu dieser Kategorie gehört alles, was mit einer bestimmten Position im Raum verbunden ist, wobei je ein Teil des Raumes mit einer Aussage in Verbindung gebracht wird.
3. Über das Material
   Man kann sich nicht nur mit dem Körper nonverbal austauschen. Dies ist ebenso mit Hilfe von Gegenständen möglich. In der Schule finden sich dazu viele geeignete Möglichkeiten.

Jeder dieser einzelnen Bereiche lässt sich nochmals aufteilen. Zur genaueren Beschreibung nonverbaler Kommunikation lässt sich zwischen „digitaler“ und „analoger“ nonverbaler Kommunikation differenzieren. Unter digital soll hier eine Kommunikation verstanden werden, bei der es diskrete Aussagen wie ja oder nein und keine „Zwischen“- oder „Teils-Teils“-Lösungen gibt. Dies ist bei der analogen Kommunikation der Fall, bei der man kontinuierlich Standpunkte einnehmen kann und man nicht auf eine spezielle Aussage fixiert ist. Hierzu gibt es eine detailliertere Abstufungseinteilung.

Beispiele nonverbaler Kommunikation

	DIGITAL	ANALOG
Körper/Körperhaltung	Verschränken der Arme, sobald man eine Lösung auf die Frage gefunden hat.  Einen vorgegebenen Winkel durch Drehen des Körpers veranschaulichen.  Einfrieren (stehen bleiben), sobald man eine Antwort hat.	Anzeigen von Meinungen mit Hilfe der Finger oder dem sog. Daumenzeiger. 
Ortskodierung	Stellung beziehen beim Museumsrundgang. Positionieren am Rand des Zimmers bedeutet das Beenden einer Aufgabe. Kodieren von Raumecken mit bestimmten Aussagen.  	Aufstellen entlang einer Skala zur Frage, wie motiviert man am Morgen in die Schule gekommen ist. 
Über das Material	Veranschaulichen der Lösung der Gleichung sin(x)=0,5 mit einem Stift. Gesucht ist also der Winkel 30°.  	Tisch wird als Skala verwendet, welcher die Müdigkeit der Schüler in % angibt (von der unteren bis zur oberen Tischkante). Mit einem Stift wird dann die persönliche Meinung positioniert.

Der große Vorteil dieser Kommunikationsformen liegt darin, dass unnötiger Lärm, welcher bei verbaler Kommunikation entsteht, vermieden wird. So herrscht eine ruhige und konzentrierte Lernatmosphäre, welche nicht durch Zwischenrufe und Gemurmel gestört wird.

Zusätzlich wird so die Möglichkeit geschaffen, dass Schüler, welche sich nicht sicher sind, ob ihre Einschätzung Sinn macht bzw. ob ihre Lösung stimmt, eine Antwort geben können, ohne sich vor der ganzen Klasse zu blamieren. Dies könnte der Fall sein, wenn einzelne Schüler direkt befragt werden. Der Lehrer kann die Schüler alle gleichzeitig abfragen, was eine sehr angenehme Methode für die Schüler darstellt. So wird garantiert, dass kein Schüler vor der ganzen Klasse bloßgestellt wird.

Ein weiterer positiver Aspekt dieser Form der Kommunikation ist die Vielzahl der Kommunikationsachsen. Bei einer Einzelabfrage eines Schülers gibt es genau eine Achse, hier jedoch wird durch das Preisgeben der eigenen Meinung durch Anzeigen (beispielsweise durch Finger) die Anzahl stark erhöht.

1.2 Nonverbale Kommunikation durch Ortskodierung

Fabian Ruf, Jesús Peinado Rubio, Franziska Schuster und Moritz Kieferle

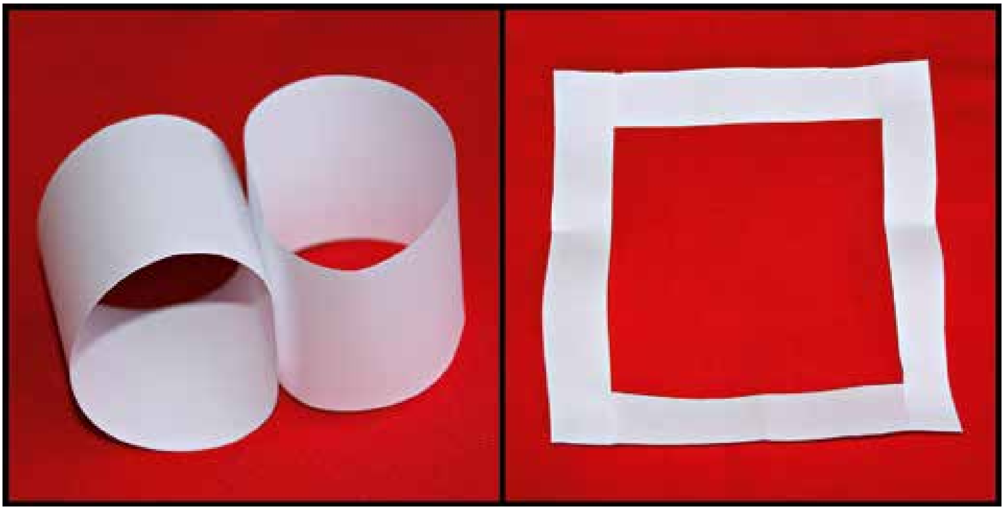
Die Schüler geben ihre Vermutung nonverbal durch ihre Positionierung im Raum wieder. Durch kurzes Argumentieren sollen die anderen Schüler von der eigenen Vermutung überzeugt werden.

Konkrete Umsetzung

Aufgabenstellung des Rätsels

Der Lehrer schneidet zwei gleich breite Streifen von einem Blatt Papier ab. Beide Streifen werden jeweils zu einem Kreis zusammengeklebt. Die beiden Kreise sollen dann quer aufeinander geklebt werden. Die dabei entstandene Figur zeigt der Lehrer den Schülern durch Hochhalten.

Nun wird den Schülern die Aufgabe gegeben sich zu überlegen, welche geometrische Figur sich ergibt, wenn man beide Kreise längs der beiden Mittelstreifen aufschneidet.



Kommunikation in der Großgruppe

Es werden einige Ideen der Schüler gesammelt. Meist ergeben sich zwischen vier und sechs verschiedenen Antworten. Die Schüler, welche ihre Vermutung geäußert haben, positionieren sich in unterschiedlichen Ecken im Klassenzimmer. Diejenigen, die keine eigene Antwort gegeben haben, entscheiden sich nun für eine der Möglichkeiten und beziehen ebenfalls Stellung, indem sie sich auch auf die verschiedenen Ecken des Klassenzimmers verteilen. So werden die Raumecken zu Repräsentanten der verschiedenen Vermutungen.

Ziele und Regeln

- Nur eine Person redet, die anderen hören zu.
- Jede Gruppe präsentiert ihre Vermutung und argumentiert für diese Antwort.
- Jeder Schüler hat jederzeit die Möglichkeit, seine Position zu wechseln.

Nun besteht das Ziel darin, dass sich zum Schluss alle Schüler in einer Ecke positionieren, also sich für die gleiche Antwort entscheiden. Um dies zu erreichen, versuchen die einzelnen Gruppen ihre Mitschüler durch entsprechende Argumente von ihrer Antwort zu überzeugen.

Damit Chaos und wildes Durcheinanderrufen verhindert wird, empfiehlt es sich, einen Gegenstand einzuführen der als „Redestab" fungiert. Dieser kann auch für weitere Übungen verwendet werden.

Auflösung des Rätsels

Es gibt drei Möglichkeiten, diese Übung aufzulösen: Der Lehrer löst das Rätsel, die Auflösung wird auf die nächste Stunde verschoben oder die einzelnen Gruppen lösen das Rätsel selbst, indem sie die beiden Streifen längs der Ränder aufschneiden. Je nach zeitlichem Rahmen oder Einbettung in die Unterrichtseinheit wird die entsprechend passende Variante gewählt.

Hintergründe

Nonverbale Kommunikation durch Ortskodierung

Durch die offene Fragestellung wird die konkrete Lösung bewusst nicht verraten. Vielmehr bekommen die Schüler die Chance, sich eine eigene Meinung zu bilden und vorzustellen. In der anschließenden Diskussion werden die eigenen Lösungsideen noch einmal verbalisiert und die eigene Vorstellung von möglichen Lösungen präsentiert. Die Schüler versuchen nun, sich gegenseitig von ihren Ideen zu überzeugen, um die Mitschüler somit auf ihre Seite ziehen zu können.

Jeder Schüler kann selbst entscheiden, ob er die Bühne betritt und seine Idee preisgeben möchte. Außerdem kann der Lehrer bei dieser Übung schnell feststellen, ob es bestimmte Gruppen in der Klasse gibt, dann nämlich, wenn nicht nach der Qualität der Idee entschieden wird, sondern die Schüler sich nach Sympathie für eine Antwort entscheiden. Der Lehrer gibt bewusst keine Antwort vor und lässt die Argumentation ohne seinen Einfluss laufen, um eine optimale Lernumgebung zu schaffen. Bei dieser Aufgabe soll den Schülern bewusst gemacht werden, dass es kein richtig und kein falsch gibt. Sie sollen ohne Angst vor einer Rüge des Lehrers unter sich Argumente austauschen können, um ihre eigenen Vorstellungen frei entfalten zu können.

Redestab

Der Redestab ist eine Möglichkeit, jedem Schüler die Chance zu geben, sich Gehör zu verschaffen. Jeder, der etwas sagen möchte, kann seine Position vertreten, während die anderen zuhören ohne ihn zu unterbrechen. Das schult die Aufmerksamkeit und vermeidet ein wildes Durcheinander.

Auflösung

Beim selbständigen Lösen des Rätsels, also beim Aufschneiden der verdrehten Acht, erleben die Schüler selbst, ob sie mit ihrer Idee richtig gelegen haben. Die Lösung ist für die meisten erst beim Aufschneiden des zweiten Streifens zu sehen, dann stellt sich aber ein sogenanntes „Aha-Erlebnis“ ein. Die Schüler sind erstaunt und fasziniert, welche Form sich schlussendlich ergibt.

Lässt man das Rätsel am Ende ungelöst, wird der Mathematikunterricht automatisch mit nach Hause genommen. Es liegt in der Natur des Menschen, Rätsel lösen zu wollen, dementsprechend wird die Aufgabe vielleicht beim Abendessen mit der Familie noch einmal diskutiert, im besten Fall sogar noch einmal selbst nachgebaut. Dadurch erreicht die Übung, dass die Stunde nicht nach dem Klingeln beendet ist, sondern noch mehrmals am Tag über das Problem nachgedacht wird. Außerdem stellt der Lehrer sicher, dass in der nächsten Stunde die Aufmerksamkeit der Schüler vorhanden ist, da jeder wissen will, wie die Lösung des Rätsels aussieht.

1.3 Mathematik Begreifen – Begriffe in der Mathematik

Nicole Möck und Lena Semmler

Die Schüler erfahren die Schwierigkeit einer exakten Beschreibung. In diesem Beispiel werden hierzu Trockenerbsen und Zahnstocher verwendet. Erstere müssen vor der Benutzung zunächst einige Stunden in Wasser eingelegt werden, idealerweise in der Nacht vor der Unterrichtsstunde.

Konkrete Umsetzung

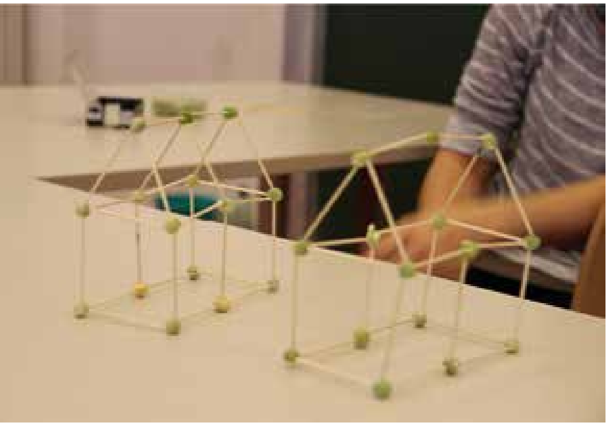
Zwei Freiwillige setzen sich voneinander abgewandt an zwei nebeneinander platzierte Tische. Einer der Schüler bekommt nun die Aufgabe aus Erbsen und Zahnstochern eine selbstentworfene Figur, die sich nicht wie ein Würfel oder ein Haus einfach benennen lässt, zu konstruieren. Während er baut, beschreibt er seine Konstruktion dem anderen Schüler, so dass dieser die Figur nachbauen kann ohne sie selbst zu sehen. Man kann die Übung verschärfen, indem der nachbauende Schüler bei Verständnisproblemen nicht nachfragen darf.

Hintergründe

Lernen am Modell

Sobald etwas ungenau formuliert wird oder ein Fehler passiert, lachen die zuschauenden Schüler. Doch sie lachen nicht über die Modellierer sondern über die Sache: Im Lachen wird die Schwierigkeit erkannt.

Exakte Beschreibung auf formaler Ebene



Häufig passieren bei dieser Übung Fehler im Kommunikationsweg: sowohl falsche Interpretationen als auch fehlende oder ungenaue Ausführungen bei der Beschreibung führen oft dazu, dass die beiden Figuren am Ende nicht übereinstimmen. Die Schüler erkennen jedoch durch diese Fehler die Schwierigkeit, Konstruktionspläne präzise zu verbalisieren. Gleichzeitig lernen sie, dass es immer dann einfacher wird etwas zu beschreiben, wenn man über treffende Begrifflichkeiten verfügt.

Fachübergreifender Aspekt

Mit dieser Übung kann man einen Bezug zu Vorgangsbeschreibungen im Deutschunterricht ziehen und so fachübergreifend arbeiten.

1.4 Feedback statt Beurteilung

Nadine Hirt und Sophia Oertel

„Das Feedback ist eine Gesprächsform, anderen etwas darüber zu sagen, wie ich sie sehe bzw. zu lernen, wie andere mich sehen. Feedback besteht daher aus zwei Komponenten, nämlich dem Feedback-Geben und dem Feedback-Nehmen.“[3]

3 http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/KOMMUNIKATION/Feedback.shtml Datum: 02.07.2013, Uhrzeit: 07:42Uhr, letzter Aufruf: 02.07.2013.

Feedback ist keine Bewertung oder Beurteilung. Stattdessen geht es um den gegenseitigen Einblick in verschiedene Wirklichkeiten.

Als Lehrer würde man gerne in den Kopf der Schüler hineinschauen, um zu wissen, was diese denken und wie sie sich fühlen. Da dies nicht möglich ist, benötigt der Lehrer das Feedback.

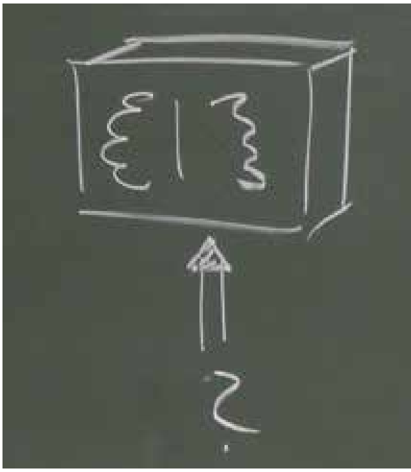


Abb. : Schülerhirn, eine Art „Black Box".

Feedback-Regeln[4]

Damit ein Feedback am Ende etwas Sinnvolles und Hilfreiches darstellt, müssen einige Regeln auf Seiten des „Feedback-Nehmers" und des „Feedback-Gebers" eingehalten werden.

Generell ist ein Feedback immer gegenseitig und freiwillig. Außerdem soll es Interesse an weiteren Rückmeldungen bringen.

Regeln für den „Feedback-Geber"

Das Feedback sollte...

- beschreibend sein, d. h. Bewertungen sind außen vor zu lassen. Kritik sollte immer sachlich formuliert werden. Das Feedback hält dem Feedback-Nehmer eine Art Spiegel vor.
- konkret sein. Mit ungenauen, zu allgemeinen Aussagen kann der Empfänger nichts anfangen, weil er nicht genau weiß, was damit gemeint ist und so die Gefahr besteht zu verunsichern. Daher: Je konkreter, desto besser.
- als Ich-Botschaft formuliert sein, denn wenn man seine eigenen Beobachtungen oder Eindrücke preisgibt, hilft dies dem Empfänger mehr, als wenn man in der „Wir-Form" spricht.
- „Positives" zuerst enthalten. Das Feedback sollte „Lust auf mehr machen" und nicht so formuliert sein, dass der Empfänger sich eventuell in Zukunft keines mehr einholen will. Es ergibt auch Sinn, das „Negative" überhaupt nicht zu beachten.
- konstruktiv sein, d.h. der Empfänger sollte einen Nutzen davon haben und die Möglichkeit dazu haben, die Kritik in Zukunft umzusetzen, wenn es für ihn passend ist.

4 http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/KOMMUNIKATION/FeedbackRegeln.shtml
Datum: 20.06.2013, Uhrzeit: 08:47Uhr, zuletzt aufgerufen: 20.06.2013.

Regeln für den „Feedback-Nehmer“

Als Empfänger von einem Feedback sollte man...

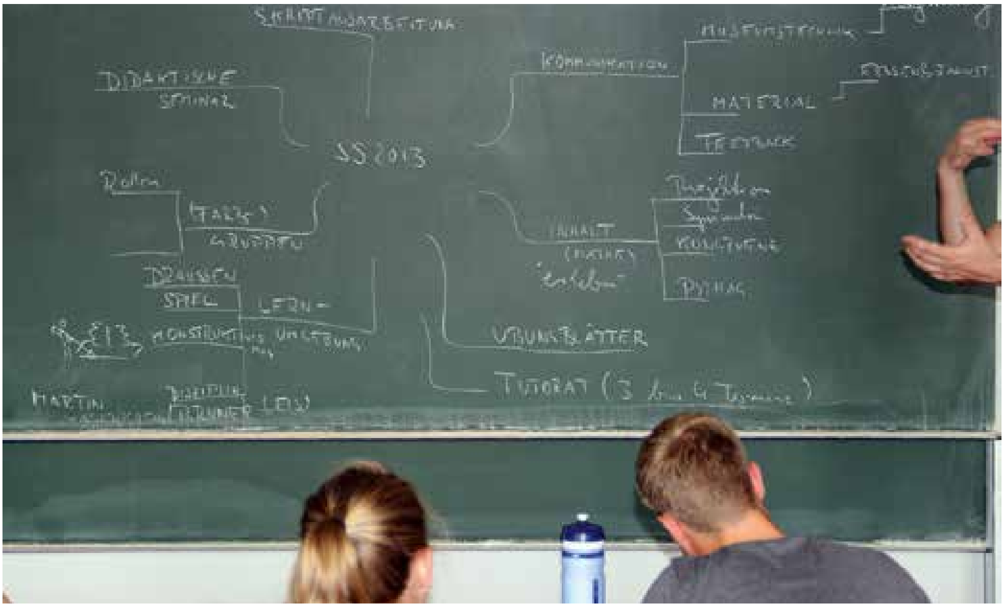
- den „Feedback-Geber“ ausreden lassen.
- sich nicht verteidigen oder rechtfertigen. Man muss sich vor Augen halten, dass der andere nur beschreibt, wie man auf ihn wirkt, was aber nicht heißen muss, dass man wirklich so ist. Es ist wichtig, die Wahrnehmung des anderen zu akzeptieren und darüber nachzudenken.
- nachfragen, wenn man das Feedback nicht richtig verstanden hat.
- dieses richtig einordnen, denn eine solche Rückmeldung stellt keinen Befehl oder Appell dar, sondern ist eine Möglichkeit, einen Einblick in sein Wirken auf andere zu erhalten.
- dankbar sein für das Feedback und dieses gerne annehmen, denn es ist ein Geschenk und eine Hilfe für einen selbst. Man kann erfahren, wie sein Auftreten und seine Art bei anderen ankommen.

Konkrete Umsetzung

Die vorgestellte Variante des Feedbacks ist als eine Möglichkeit zu sehen, wie man das Feedback in einer Klasse durchführt.

Durchführung

Bevor das Feedback z.B. zu jeder Unterrichtseinheit oder nach jeder Klassenarbeit durchgeführt wird, wird gemeinsam mit den Schülern an der Tafel gesammelt, was



in dieser Einheit geschehen ist. Damit wird vermieden, dass beim Feedback nur ein kleiner Ausschnitt berücksichtigt wird. Stattdessen wird ein Gesamtüberblick über die Einheit geschaffen.

Da das Feedback gegenseitig stattfindet, beteiligt sich auch der Lehrer. Um ein entsprechendes Beispiel zu geben kann es sinnvoll sein, dass dieser damit beginnt. Im Anschluss formuliert er eine oder mehrere konkrete Fragen, zu welchen er eine Rückmeldung wünscht. Jeder nimmt hierzu ein leeres Blatt Papier und beschriftet es mit seinem Namen. Ist dies geschehen, wird sich hierauf nun schriftlich geäußert. Im Anschluss werden die Blätter an die Wand gehängt um einen Rundgang zu starten, bei welchem alle die Äußerungen der Mitschüler lesen können. Wem eine Äußerung persönlich gut gefällt oder unterstützenswert erscheint, kann seinen Namen auf das entsprechende Blatt hinzu schreiben. Hierdurch wird das Feedback zu einer Art Selbstoffenbarung.

Die Blätter werden im Nachhinein vom Lehrer eingesammelt. In der nächsten Stunde können von ihm verschiedene Aspekte, die genannt wurden, in der Klasse angesprochen werden. Er kann auch, da die Blätter mit Namen versehen sind, einzelne Personen direkt ansprechen, um z .B. konkrete Rückfragen zu stellen.

Kritik sollte wertgeschätzt werden, da es für den „Kritik-Geber“ auch nicht immer einfach ist, Kritik zu äußern.

Weitere Möglichkeiten zum Feedback

Nonverbales Anzeigen

Neben dieser Art des Feedbackgebens gibt es noch weitere Möglichkeiten, z. B. nonverbal durch das Aufzeigen des Daumens. Für die verschiedenen Stellungen des

Daumens werden unterschiedliche Antwortabstufungen auf die Frage des Lehrers festgelegt. Nachdem der Lehrer seine Frage gestellt hat, zeigen die Schüler durch ihren Daumen an, für welche Antwort sie sich entschieden haben. Diese Art bietet sich zum einen besonders bei Fragen an, deren Antwortmöglichkeiten eine Tendenz enthalten, z. B. „ Seid ihr noch aufnahmebereit für neue Inhalte?“ oder „ Hat euch diese Übung gefallen?“. Zum anderen bietet sie sich an, um kurz und knapp einen Überblick zu gewinnen.

Passend/ unpassend – Zettel

Eine weitere Alternative dazu ist die Methode des „passend/unpassend“ – Zettel. Wenn sie nicht den Anspruch auf Objektivität erhebt und sie als Möglichkeit wahrgenommen wird, in die Wirklichkeit der Schüler Einblicke zu erhalten, ist sie eine Variante des Feedbacks. Bei dieser Methode schreiben die Schüler in einer zweispaltigen Tabelle jeweils auf, was als passend bzw. unpassend empfunden wurde. Dies wird im Nachhinein vom Lehrer eingesammelt.

2 Hilfen zur Umsetzung

2.1 Platz schaffen für Handlungs- und Erlebnisorientierte Didaktik

Fabian Ruf, Jesús Peinado Rubio, Franziska Schuster und Moritz Kieferle

Das Ziel dieser Aufgabe ist, das Klassenzimmer so umzugestalten, dass genügend Platz entsteht, um handlungsorientierte Didaktik zu betreiben. Der Prozess soll durch die Gruppendynamik der Klasse geleitet werden.

Konkrete Umsetzung

Zu Beginn veranschaulicht der Lehrer mit Hilfe einer Skizze des Klassenraums die gewünschte Form graphisch an der Tafel.

Vorhersagendes Schätzen

Die erste Aufgabe der Schüler besteht darin, zu schätzen, wie viel Zeit sie für den vorgegebenen Auftrag benötigen. Damit jeder Schüler eine eigene Einschätzung abgibt, verschränkt er die Arme, sobald er sich auf eine Zeitangabe festgelegt hat. Auf Zeichen des Lehrers kann die Schätzung mit Hilfe der Finger von allen Schülern gleichzeitig angezeigt werden. Dabei steht ein Finger für eine Minute.

Umräumen

Bevor es losgeht, gibt der Lehrer zwei Hinweise: erstens wird während der ganzen Übung nicht gesprochen, zweitens finden sich nach dem Umräumen alle Schüler am Rand der Zimmers oder in einem Kreis ein. Dann gibt der Lehrer das Startzeichen.

Rückblickendes Schätzen

Ein weiteres Mal schätzen die Schüler nach obiger Methode, wie lange sie gebraucht haben. Dieses Mal steht etwa ein Finger für zehn Sekunden.
Nun sind die räumlichen Voraussetzungen für beispielsweise eine Gruppenarbeit geschaffen.

Hintergründe und Bemerkungen

„Noch Fragen?“

Nach dem Stellen einer Aufgabe versichert sich der Lehrer grundsätzlich, ob alle Schüler wissen, was zu tun ist. Dazu gibt der Lehrer den Schülern die Möglichkeit Rückfragen zu stellen, um Unklarheiten vorzubeugen. Dies erzeugt eine Lernumgebung, in der die Schüler ihre Aufgabe erfüllen, ohne dass der laufende Prozess durch Fragen gestört wird. Der Lehrer kann sich nun zurücknehmen und den Prozess von außen beobachten, ohne in die Klassendynamik einzubrechen.

Stärken der Gruppendynamik

Alle Schüler packen an, um im Raum Platz zu schaffen. Tische und Stühle werden gemeinsam zur Seite geräumt. Das Unterbieten der anfangs geschätzten Zeit (meist benötigt die Gruppe ca. 100 Sekunden) schenkt den Schülern somit ein gemeinsames Erfolgserlebnis. Es handelt sich somit nicht nur um eine Vorbereitung für kommende Übungen, vielmehr wird durch diese spielerische Herausforderung die Gruppendynamik in der Klasse gestärkt, da viele überrascht sein werden, wie gut die Zusammenarbeit funktioniert hat. Die Übung gewinnt durch das Schätzen an Schwung und Effizienz, da niemand daran schuld sein möchte, dass die Gruppe länger braucht als nötig.

Teamwahrnehmung
Das Verschränken der Arme stellt in diesem Kontext eine Form der nonverbalen Kommunikation dar. Die Schüler teilen dadurch sowohl dem Lehrer als auch den Mitschülern mit, dass sie sich für eine Antwort entschieden haben.
Mit Hilfe der Schätzung gewinnt die Aufgabe für die Schüler unbewusst an Dynamik. Sie werden angespornt, die zuvor geschätzte Zeit zu erreichen, oder sogar zu unterbieten. Für gewöhnlich fallen die Schätzungen vor der Übung zu hoch aus (meist zwischen 3 und 8 Minuten).

Die Schüler offenbaren durch ihre Schätzung ohne die anderen Finger zu sehen, wie sie sich selbst und die Gruppe einschätzen, wie motiviert sie sind und welche Energie und Leistung sie von sich und den Anderen erwarten. Genauso können sie ihre persönliche Einschätzung im Anschluss an die Übung im Kreis vergleichen. Durch diese Form der Offenbarung entsteht eine Vielzahl an Kommunikationsachsen, die durch Aufrufen der einzelnen Schüler durch den Lehrer erheblich mehr Zeit in Anspruch nehmen würde.

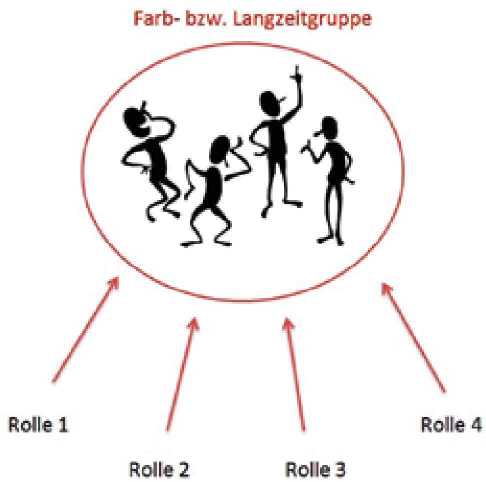
2.2 Rollenverteilung innerhalb einer Langzeitgruppe

Dorothee Müller, Miriam Rademacher und Kathrin Spies

Nicht viele Menschen haben gute Erfahrungen mit Gruppenunterricht gemacht. Häufig bearbeitet einer der Gruppe die Aufgabe alleine oder der vorgegebene Zeitrahmen wird aufgrund schlechten Zeitmanagements nicht eingehalten. Um eine funktionierende Gruppenarbeit zu gewährleisten, kann der Gruppe bzw. Farbgruppe[5] eine „innere Struktur" vorgegeben werden.

Konkrete Umsetzung

Individuelle Rollen bei Gruppenarbeiten
Die Rollenverteilung innerhalb der Gruppe bildet den Grundstein für eine erfolgreiche Gruppenarbeit. Werden im Unterricht Gruppen von vier Personen gebildet, ist beispielsweise folgende Rollenverteilung sinnvoll:



5 Farbgruppe: Eine Langzeitgruppe, welche farblich kodiert wird

- Gesprächsleitung
  Der Gesprächsleiter hat die Aufgabe, den Überblick über den Verlauf der Gespräche zu behalten. Er leitet, lenkt und ordnet die Beiträge und fasst diese gegebenenfalls zusammen. Des Weiteren sorgt er für Konzentration auf das Wesentliche und unterbindet Privatgespräche.
- Protokollant
  Der Protokollant ist für die Sicherung aller wichtigen Daten, Beobachtungen und Ergebnisse verantwortlich.
- Zeitmanager
  Der Zeitmanager sorgt dafür, dass die Aufgaben im gegebenen Zeitrahmen bearbeitet werden und schreitet bei unnötigen und unwichtigen Diskussionen ein.
- Materialwart
  Der Materialwart ist verantwortlich für das benötigte Material. Er kümmert sich um die Vollständigkeit und die Unversehrtheit der Materialien.

Rollenverteilung

Zur Verteilung der Rollen innerhalb einer Gruppe bieten sich sogenannte „Rollenkarten“ an. Sie werden an die Gruppe ausgeteilt, wodurch jedem Schüler eine bestimmte Rolle zukommt. Dabei ist es wichtig, dass bei jeder neuen Aufgabe die Rollen getauscht werden, um Gleichberechtigung herzustellen. Sollte zudem ein Schüler beispielsweise aufgrund von Krankheit ausfallen, so muss ein anderer Schüler diese Aufgabe mit übernehmen.

Durch die Rollenkarten wird die Verantwortung konkretisiert. Den Schülern wird jeweils eine Rolle zugeteilt, die sie verbindlich zu erfüllen haben.

Dies ist aber nur eine von vielen Möglichkeiten, Rollen innerhalb einer Gruppe zu verteilen. Es sind durchaus auch andere Rollen in kleineren oder größeren Gruppen denkbar.

Abb. Rollenkarten[6]

6 Link zum Download der Rollenkarten: http://www.unterricht-als-abenteuer.de/download/Rollenkarten%20fuer%20Gruppenunterricht.pdf (09.05.2013)

Hintergründe

Rollenzuweisung innerhalb einer Gruppe

In einer Gruppe gibt es bestimmte Rollen, die eingenommen werden müssen. Dabei ist zu beobachten, dass es automatisch zu einer natürlichen Rollenbildung kommt. So übernimmt häufig einer den „Chefposten“ oder ein anderer spielt den „Kasper“. Schließt man einen störenden Schüler aus einer Gemeinschaft aus, wird diese Rolle in der Gruppe neu besetzt.

Durch die klare Rollenverteilung von Zeitmanager, Materialwart, usw. fühlt sich jeder in der Gruppe für eine bestimmte Aufgabe verantwortlich und kann vom Lehrer, oder auch von anderen Schülern, direkt angesprochen werden, wenn diese Aufgabe nicht zufriedenstellend erledigt wird. Die Verantwortung liegt also nicht mehr bei der Gruppe, hinter der sich jedes Mitglied verstecken kann, sondern bei den Einzelpersonen.

Rollenwechsel und Rollenentwertung

Bei einer solchen Rollenverteilung kann es vorkommen, dass Rollen schnell mit negativen Klischees in Verbindung gebracht werden. So wird der Zeitmanager als „Nörgler“ abgestempelt oder der Protokollant ist nur noch die „Tippse“ oder der „Schreiberling“. Der Materialwart wird als „Depp vom Dienst“ tituliert und die Gesprächsleitung wird zum „Boss“. Um eine Personifizierung eines Schülers z. B. als „Nörgler“ zu verhindern, ist es wichtig, die Rollen regelmäßig zu tauschen. Dadurch wird die bereits erwähnte Gleichberechtigung gesichert und die Schüler fühlen sich nicht unfair behandelt. Jede Rolle fordert von der ausführenden Person unterschiedliche Kompetenzen. Durch den Rollentausch wird gewährleistet, dass alle Schüler die Möglichkeit bekommen, die verschiedenen Kompetenzen zu schulen. Außerdem bekommen schüchterne Schüler die Gelegenheit, in bestimmten Rollen ihr Können unter Beweis zu stellen. Eher extrovertierte Schüler lernen, sich zurückzuhalten und um ihre Aufgabe zu kümmern. Durch den Rollentausch fühlen sich die Schüler in jede einzelne Rolle hinein und lernen, diese besser Wert zu schätzen. Durfte der Materialwart am Anfang noch allen „hinterher räumen“, wird später darauf geachtet, dass nicht jeder seinen „Müll“ liegen lässt.

Anmerkung

Die zugeteilten Rollen sind als Zusatz zu verstehen. Die Strukturierung der Gruppe dient der Arbeit an der eigentlichen Aufgabe, die von allen bearbeitet wird.

2.3 Intelligentes Üben – Spiele(n) im Unterricht

Susanne Reichenbach, Martin Maletz und Carolin Faulk

Spiele bieten sich im Unterricht zum üben an. Dabei können sie entdeckend oder wiederholend fungieren.

Konkrete Umsetzung

Es sind verschiedene Spiele für unterschiedliche Gruppengrößen denkbar. Im Folgenden findet man eine im Rahmen der Vorlesung als Übungsaufgabe entstandene Auswahl[7]:

In Anlehnung an bekannte Spiele:

- Quartett (geometrische Körper; 3D trifft 2D (siehe nächste Seiten))
- Memory (Geomemo, Geometrie Memory)
- Activity (Geotivity)
- Mensch-ärgere-dich-nicht (Mensch-verrechne-dich-nicht)
- Malefiz (Mathefiz)

Frei erfundene Spiele:

- Schweinerei (Werfen kleiner Schweine aus Plastik - durch Wahrscheinlichkeiten entscheiden, ob man weiterwirft)
- ErBoZa (siehe nächste Seiten)
- Das Geometriespiel (Brettspiel mit verschiedensten Aktionskarten)
- Erbsenzähler (durch das Bauen geometrischer Körper mit Erbsen und Zahnstocher werden Punkte in Form von Erbsen gesammelt)
- Piratenspiel (siehe nächste Seiten)
- Erbsen und Zahnstocher (Sammeln verschiedener Vorgabe-Karten um daraus geometrische Objekte zu bauen)

7 Ausarbeitungen der einzelnen Spiele befinden sich auf der Homepage des Didaktischen Seminars: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/lehre/ss13/ddgs/

3D meets 2D

Bei diesem Spiel handelt es sich um ein klassisches Quartett. Daher ist es einfach und ohne große Erklärungen umzusetzen. Zu einer gegebenen 3D-Karte müssen die passenden 2D-Karten, Projektionen des Gebildes, gesammelt werden. Hierbei wird das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler trainiert; sie müssen die Zusammenhänge zwischen den beiden Dimensionen kennen und außerdem in der Lage sein, die Körper gedanklich zu drehen. Da weiter keine Vorkenntnisse benötigt werden, ist das Spiel in allen Klassenstufen anwendbar. Dabei kann der Schwierigkeitsgrad durch einsetzen anderer Körper recht einfach variiert werden. Dadurch ist auch eine Binnendifferenzierung innerhalb der Klasse möglich: die 3D-Karten können bewusst nach Schwierigkeitsgrad an die Schüler verteilt werden.

Dieses Spiel eignet sich gut, um das in der Mathematik immer wieder wichtige räumliche Vorstellungsvermögen zu trainieren.

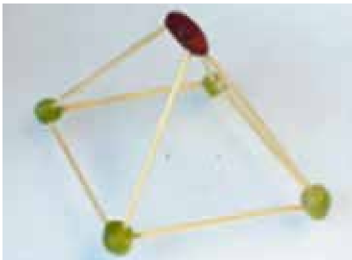
Das Piratenspiel

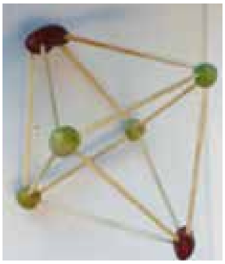
Mit dem Piratenspiel soll das Wissen der Schüler in den Teilgebieten Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung überprüft werden, die Aufgabenkarten lassen sich aber auch auf andere Gebiete ausweiten. Dabei ist besonders bemerkenswert, dass man mit den anderen Mitspielern zusammen gegen fiktive Piraten spielt, nicht gegeneinander.

Ziel des Spiels ist, so viel Gold wie möglich zu bergen, bevor die Piraten den Goldschatz erreicht haben. Hierbei können die Spieler bei einer richtigen Antwort Gold gewinnen; bei einer falschen Antwort rücken die Piraten näher an den Schatz.

Das Spiel ist beendet, sobald alle Fragekarten aufgebraucht sind, der Schatz vollständig geborgen ist oder die Piraten den Goldschatz erreicht haben.

ErBoZa



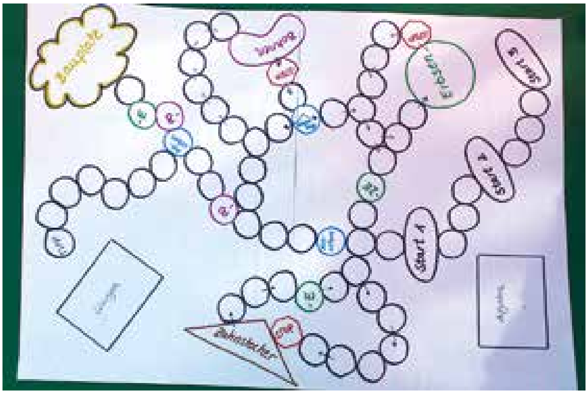


ErBoZa ist ein Spiel, das die Begriffe verschiedener Körper und Figuren festigt und die dreidimensionale Vorstellung dieser ermöglicht. Durch das Tempo des Spiels und eingebaute Tücken, die einem das Aufholen ermöglichen können, steigert es die Motivation und das Wettkampfempfinden der Schüler. Hierdurch legen diese mehr Elan an den Tag, um die Begriffe in den Arbeitsaufträgen auch richtig umzusetzen und sich zu merken.

Dieses Brettspiel umfasst die Körper Hexaeder, Tetraeder, quadratische Pyramide, Rechteck, Oktaeder, Quadrate und Dreiecke und ist bereits ab der 6. Klasse für den Einsatz geeignet.

Ziel des Spiels ist es, den gegebenen Körper zu bauen. Eine besondere Schwierigkeit tritt auf, wenn an besonderen Stellen anderes Material zu verwenden ist. So sind die Grundbausteine dieser Körper und Figuren stets Zahnstocher und Erbsen, jedoch müssen auch Bohnen mit eingearbeitet werden. Dabei bedarf es dreidimensionaler Vorstellungskraft um sich den Körper vorzustellen, aus dieser Vorstellung heraus zu bauen und zusätzlich noch darauf zu achten, wo die Bohnen dabei platziert werden müssen.

In ErBoZa wird das Material für den Auftrag jedoch nicht von Anfang an gegeben. Erst muss es erspielt werden. Dafür sind eigens Materialfelder in das Spielfeld eingebaut, auf denen um die zu erhaltende Menge des Materials gewürfelt wird. Indem es offen bleibt, wie schnell sie ihr benötigtes Material erhalten um zum „Bauplatz“ gehen zu können und ihren Auftrag zu bauen, kommt Spannung ins Spiel.
Die verschiedenen Aufträge benötigen unterschiedlich viel Material. Um dennoch gleiche Voraussetzungen zwischen den Spielern zu schaffen, gibt es verschiedene Startpositionen auf dem Spielfeld, die den Aufträgen angepasst sind.
Sollten Spieler nicht genau wissen, wie ihr Auftrag aussieht, oder einfach auf Nummer Sicher gehen wollen, so können sie sich bei dem „Tipp“-Feld Hilfe holen. Allerdings kostet das wiederum Zeit und somit bleibt die Moti-



vation hoch, die Begriffe der Körper und Figuren zu kennen, um schneller zu sein. Der erste Spieler, der seinen Auftrag richtig fertig gebaut hat, geht als Sieger von ErBoZa hervor. Allerdings überprüfen die Mitspieler ihn mit den Lösungskarten, um einen Fehler dabei auszuschließen. Erschwerend kommt hinzu, dass während der eigenen Bauzeit die anderen weiter spielen dürfen, sodass ein vermeintlicher Sieger überholt werden kann.

Schüler entdecken Spiele

Es ist denkbar, die Schüler nicht nur spielen zu lassen, sondern ihnen die Aufgabe zu geben, selbst Spiele zu erstellen. Dies ist am Ende einer Einheit am sinnvollsten, wenn die grundlegenden Sachverhalte überblickt werden. Erst durch das Stellen von Aufgaben werden die Inhalte umfassend verstanden. Zum Schluss probieren die Schüler ihre erfundenen Spiele selbst aus.

Hintergründe

„Spiel ist nicht Spielerei, es hat hohen Ernst und tiefe Bedeutung."

(Friedrich Fröbel in „Die Menschenerziehung", 1826)

Der Mensch als „Spielkind"

Bei Beobachtungen in der Natur stellt man fest, dass fast alle Säugetiere im Kindesalter spielen. Obwohl das Spiel mitunter gefährlich ist, scheint es ein hervorragendes Lernkonzept zu sein. Der Mensch ist ein Lebewesen, das noch im Erwachsenenalter spielt. Das Spiel fördert hierbei den Forscher- und Entdeckungsdrang und ist deshalb einer der Faktoren, die den Menschen zum Menschen machen. Folglich sollte man das Spiel nicht als unwichtig abtun. Es hat seinen Platz im Unterricht, nicht nur in Vertretungsstunden und vor den Ferien. Ganz im Gegenteil, es bietet eine effektive Übungsmöglichkeit.

Kompetenzenförderung

Im Spiel lernt man mehr als „nur" Mathematik, man entwickelt automatisch soziale Kompetenzen (Kommunikationsfähigkeit, Teamfähigkeit, ...), Personale Kompetenzen (Durchhaltevermögen, Ordentlichkeit, ...), usw.

Spiele leisten somit einen Beitrag zur „Vermittlung von überfachlichen Kompetenzen"[8], zu deren Förderung Lehrpersonen im Bildungsplan angehalten werden.

8 Bildungsplan 2004, Mathematik.

„Learning by doing"– Entwicklung eigener Spiele

Bei der Entwicklung eigener Spiele müssen sich die Schüler konkrete Gedanken zum Lerninhalt machen. Dadurch wird nicht nur das Gelernte wiederholt, sondern auch geordnet, vernetzt, gewichtet und verinnerlicht.

Die Schüler sind für das Endprodukt selbst verantwortlich, da die Mitschüler am Spiel lernen sollen. Dies bringt eine hohe Wertschätzung der Arbeit und Qualität der Spiele mit sich. Nach Zustimmung der Autoren, also der Schüler, hat der Lehrer eventuell auch die Möglichkeit die Spiele in anderen Klassen einzusetzen.

Geometrie

3 Symmetrie

3.1 Symmetrie im Raum: Maximales Chaos und Ordnung

Julia Pflumm

Die folgenden Übungen eignen sich um die Achsensymmetrie in Klasse 5 einzuführen. Die Schüler erfahren die Symmetrie nicht auf einem Blatt Papier, sondern im eigenen Klassenraum.

Phase 1: Konkrete Umsetzung – Maximales Chaos

Während dieser Übung sollte unbedingt auf verbale Kommunikation verzichtet werden, denn durch die Stille gewinnt die Übung an ästhetischem Wert.

Die Schüler bekommen die Aufgabe, im Klassenraum ein maximales Chaos entstehen zu lassen. Dazu darf jeder genau einen Gegenstand im Raum versetzen. Wichtig

ist dabei, dass am Rand jeweils circa ein Meter Platz gelassen wird, um in der Mitte eine „Bühne“ entstehen zu lassen. Dieser am Rand geschaffene Platz kann auch für Wertgegenstände genutzt werden. Bei der gesamten Übung soll nicht verbal kommuniziert werden. Weiter darf keine Gefahr von umfallenden Tischen, Stühlen, etc. ausgehen. Schüler, die ihren Beitrag zum Chaos geleistet haben, stellen sich an den Rand. Erst wenn alle soweit sind, geht es weiter.

Erweiterung – Ein Foto vom Chaos

Im Anschluss wird von der chaotischsten Stelle im Raum ein virtuelles Foto gemacht. Hierzu gehen die Schüler um die Bühne herum und wählen für sich zwei bis drei Standpunkte aus, von denen aus ihrer Sicht das Chaos am größten erscheint. Zur Unterstützung der Kameraperspektive kann mit dem Zeigefinger und Daumen der jeweils rechten und linken Hand ein Fotoformat erzeugt werden. Dieser Anblick wird sich den Schülern in der Schule wahrscheinlich nie wieder bieten.

Hintergründe

Die Regel, dass kein Wort gesprochen werden soll, dient zum einen dem Senken des Lärmpegels, zum anderen der Sicherheit der Schüler. Denn, wo gesprochen wird, passieren mehr Unfälle.

Phase 2: Konkrete Umsetzung – Maximale Ordnung

Diese Phase schließt direkt an die erste an und sollte ebenfalls ohne verbale Kommunikation erfolgen.

60 Sekunden zum Aufräumen

Die Gruppe hat auf ein Zeichen des Lehrers hin 60 Sekunden Zeit, um den Raum so ordentlich wie möglich zu gestalten. Dabei darf nicht die ursprüngliche Sitzordnung hergestellt werden. Nach 60 Sekunden stehen alle erneut am Rand des Raumes. Nun können sich alle einen Überblick verschaffen, bevor sie in einem weiteren Durchlauf von 60 Sekunden noch mehr Ordnung herstellen.

Aufräumen mit dem Zug-um-Zug-Prinzip

Nach Beendigung der oben genannten Phasen folgt das sogenannte „Zug-um-Zug-Prinzip“: Jeweils nur ein Mitglied der Gruppe tritt auf die Bühne und verändert die Position eines Gegenstandes mit dem Ziel, den Raum noch ordentlicher werden zu lassen. Ist diese Person fertig, so tritt sie wieder zurück und das nächste Gruppenmitglied kann beginnen. Stets gilt: Jeder der will, darf auch, aber keiner muss. Dieses Prinzip kann je nach zeitlichem Rahmen beliebig lange durchgeführt werden. Das Ende der Übung ist jedoch stets vergleichbar: Im Raum entsteht eine achsensymmetrische Anordnung des Mobiliars und sonstiger Gegenstände. Interessant ist außerdem, dass Einzelstücke (z. B. der Mülleimer) meistens automatisch auf einer Linie, der Symmetrieachse, abgelegt werden. Hierdurch wird ihre Bedeutung hervorgehoben.

Hintergründe

Bühne und Rollen

Das Gruppenmitglied wird zum freiwilligen Protagonisten auf der Bühne. Nach einer gewissen Zeit gibt es eine Annäherung an die Achsensymmetrie, ohne dass der

Lehrer dies explizit fordert. Dieser nimmt lediglich die Rolle des Schiedsrichters ein und kontrolliert den Verlauf der Übung, ist aber dabei nie aktiver Protagonist.

Symmetrie entsteht aus dem ästhetischen Verständnis aller

Der Schüler macht Erfahrungen mit der Symmetrie, ohne sich dessen bewusst zu sein. Die Anordnung im Raum nähert sich schrittweise der Achsensymmetrie an, da diese als ordentlich empfunden wird. Die Symmetrie wird also nicht an die Schüler herangetragen, sondern entsteht sozusagen aus ihrem ästhetischen Verständnis heraus.

Symmetrie als Ordnung – erster Grenzwertprozess

Die Übung könnte beliebig oft fortgeführt werden, da die Bühne immer noch ordentlicher gestaltet werden kann. Hierbei erfährt die Gruppe den nie endenden Prozess hin zu vollkommener Ordnung bzw. Symmetrie.

3.2 Die (geschaffene) Ordnung wird bespielt: Zwillingsspiegelung

Armin Hartmann

Nachdem der Raum achsensymmetrisch gestaltet ist, wird dieser bespielt. Symmetrie wird in Bewegung erfahren.

Konkrete Umsetzung

Während der folgenden Übungen wird nicht gesprochen, um die Ästhetik des Vorgangs zu schützen. Jeder Schüler sucht sich in der Klasse einen Mitschüler, der ihm in möglichst vielen äußeren Merkmalen ähnelt, wie Größe, Statur, Haarfarbe, Kleidung, Gesichtsform usw. Zusammen bilden sie ein sogenanntes Zwillingspaar. Im Raum wird eine Spiegelachse (z. B. eine Deckenlampe oder eine verlängerte Tisch-

kante) festgelegt. Die entstandenen Paare ordnen sich nun symmetrisch zur Achse im Raum an. Es steht ihnen frei, welche Position oder Haltung sie im Raum einnehmen, solange sie die Symmetrie aufrecht erhalten. Dabei kann auch auf einzelne Details geachtet werden, z. B. ob sie die Uhr am gleichen Arm tragen.

Nun versuchen beide Partner, sich synchron zu bewegen. Im Zuge dessen ist klar, dass einer der beiden oder beide als Initiator einer Bewegung fungieren. Allerdings müssen sie auch gleichzeitig darauf achten, die Bewegung des Anderen exakt nachzuahmen. Dies gelingt am besten, wenn die Übung im „Schneckentempo“ ausgeführt wird.

Zu guter Letzt können beide symmetrisch zueinander ein Hindernis (Tisch, Stuhl, o.Ä.) überwinden. Hierzu ist es gut, den Schülern ein Zeitlimit zu setzen um die Übung nicht zu lange auszudehnen. Interessant wird es auch, wenn ein Paar versucht die Spiegelachse zu überwinden. Sie müssen dann feststellen, dass dies nicht funktioniert.

Erweiterung – Ein Bild für das Schulheft

Je nach Wunsch können alle Schüler in einer spiegelbildlichen Position verharren, um ein Schlussbild (evtl. als Klassenfoto oder als Foto im Schulheft) zu schießen. Dies ist eine gute Möglichkeit, etwas Haptisches und Persönliches aus dem Unterricht mitzunehmen. Mit einem solchen Foto können lebendige Erinnerungen ins Heft eingeklebt werden.

Hintergründe

Die Symmetrie als Pädagoge

Durch die vorgegebenen Auswahlkriterien für den „Zwilling“ wird die Gefahr der Ausgrenzung einzelner reduziert, da die Schüler nicht nach Sympathie auswählen. Falls eine Person beim Auswahlverfahren übrig bleibt, bekommt sie eine Sonderstellung: sie fungiert als eine Art Schiedsrichter, der die Genauigkeit der Spiegelnden überprüft und korrigiert.

Beziehungsbildung

Ganz automatisch sucht jeder Schüler bei seinem Gegenüber nach Unterschieden und Gemeinsamkeiten mit sich selbst. Durch das gemeinsame Erleben der Bewegung wird häufig der Spiegelpartner noch einmal ganz anders wahrgenommen.

3.3 Symmetrie in der Gruppe: Geometrische Formen nachstellen

Barbara Sieger

Diese Methode zum Stellen von symmetrischen Figuren zeigt eine Möglichkeit auf, die Arbeit im Team zu trainieren und gleichzeitig eine Schätzübung zu integrieren.

Konkrete Umsetzung

Die ganze Klasse bewegt sich frei im Raum. Der Lehrer kündigt an, in welcher geometrischen Form sich die Schüler nach seinem Startsignal zusammenfinden sollen. Sobald er das Kommando gibt, stellen sich die Schüler in der vorgegebenen Figur auf, ohne dabei verbal oder mit Hilfe von Handbewegungen miteinander zu kommunizieren. Möglich ist sowohl das Zusammenkommen in einfacheren, symmetrischen Formen, wie einem Kreis, einem Quadrat oder einem Rechteck, als auch in schwieriger umzusetzenden Figuren, wie einem Fragezeichen. Je mehr Symmetrieachsen eine Form hat, desto einfacher ist es, sie nachzustellen.

Schwerer wird es, wenn die Schüler auf das Kommando des Lehrers hin stehen bleiben, die Augen schließen und sich dann mit geschlossenen Augen in einem Kreis aufstellen müssen. „Blind“ und ohne verbale Kommunikation ist nur das Aufstellen in einem Kreis, also der Form mit unendlich vielen Symmetrieachsen, gut möglich.

Erweiterung

Förderung des Gruppengefühls

Hat sich die Klasse in einem Kreis zusammengefunden, besteht die Möglichkeit, in einem gemeinsamen Rhythmus zu atmen. Alle Personen im Kreis sollten hierfür so nah an ihrem Nachbarn stehen, dass sich ihre Schultern leicht berühren. Die Gruppe schließt die Augen und jeder versucht, den Atemrhythmus seines Nachbarn zu spüren und sich diesem anzugleichen. Bei dieser Übung sollte man sich sicher sein, dass die Gruppe dafür bereit ist und die Übung annimmt.

Schätzen des Flächeninhalts

Eine weitere Möglichkeit die Situation zu nutzen, ist die Diskussion verschiedener Eigenschaften der geometrischen Form, beispielsweise das Schätzen des Flächeninhalts. Das Schätzen funktioniert auf dieselbe Art und Weise, wie es im Abschnitt „Platz schaffen“ beschrieben steht.

Hintergründe

Teamtraining

Um sich in einer vorgegebenen Form aufstellen zu können, ist es wichtig, dass jeder sich erst einmal klar macht, wie diese Form definiert ist. Da keine Kommunikation erlaubt ist, muss jeder für sich seinen Platz in der Form finden und es wird verhindert, dass einzelne das Kommando übernehmen und andere sich nur fügen.

Das lückenlose Atmen ist eine Übung zur Gruppenbildung. Lässt sich die Klasse auf die Übung ein, entsteht über die Synchronisation des Atmens in jedem einzelnen ein starkes Gefühl der Zusammengehörigkeit mit den anderen.

3.4 Punktsymmetrie als doppelte Achsensymmetrie

Daniela Pfeifer und Lisa Eberle

Konkrete Umsetzung

Vorbereitung: Schaffen einer geeigneten Lernumgebung

Die Schüler stellen die Tische an die Seiten des Klassenzimmers und finden sich in einem möglichst großen Stuhlkreis zusammen. Innerhalb des Stuhlkreises soll Ordnung sein, dafür bringt jeder etwas von den störenden Gegenständen weg, bzw. den Abfall auf dem Boden zum Mülleimer..

Phase 1

Punktspiegelung durch mehrfache Achsenspiegelung

Der Lehrer erzeugt mit Klebeband ein großes Kreuz auf den Boden. Ein Schüler stellt sich in einer asymmetrischen Haltung (z. B. Hand an die Nase) in einen Quadranten (I) des auf dem Boden aufgeklebten Kreuzes. Ein weiterer Schüler stellt sich in einen benachbarten Quadranten (II) und versucht den ersten zu spiegeln. Nach dem Zug-um-Zug Prinzip[9] dürfen die Mitschüler nacheinander Fehler korrigieren.

9 Zug-um-Zug Prinzip, d.h. einer nach dem anderen

Eine weitere Person stellt sich in Quadrant (III) und versucht den Schüler aus Quadrant (II) zu spiegeln. Derjenige in Quadrant (I) soll sich nun langsam bewegen. Diejenigen in den anderen Quadranten probieren dazu ein Spiegelbild darzustellen, wobei sich der vorgestellte Spiegel auf den Achsen befindet. Im nächsten Schritt wird der Schüler aus Quadrant (II) entfernt und der dritte versucht erneut sich symmetrisch zum ersten zu bewegen. Diese Bewegung ist punktsymmetrisch zum ersten Schüler und somit wird deutlich, dass man durch Spiegelung an zwei Achsen, welche senkrecht aufeinander stehen, Punktspiegelung erhält.

Phase 2

Fehlerspiel

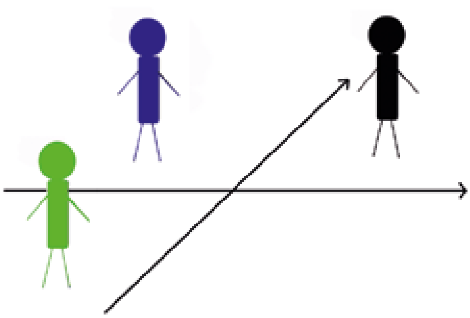
Es werden vier bis fünf Schülerpaare gebildet. Jedes Paar ordnet sich punktsymmetrisch zur Kreuzmitte an. Die Mitschüler dürfen nach dem Zug-um-Zug-Prinzip Fehler korrigieren.

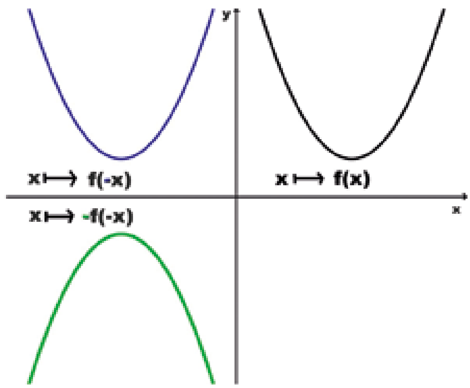
Im nächsten Schritt schließen die Mitschüler die Augen und der Lehrer baut zwei Fehler ein. Wer einen Fehler findet, steht auf und korrigiert diesen. Bei Zustimmung applaudieren die Mitschüler.

Phase 3

Weiterführung in der Oberstufe

In der Oberstufe kann die Erkenntnis, dass die aufeinanderfolgende Spiegelung an zwei zueinander senkrechten Achsen eine Punktspiegelung ergibt, auf folgende Weise auch allgemein für Funktionen besprochen werden. Die Übung wird hierbei zunächst wie in Phase 1 durchgeführt. Anschließend zeichnet der Lehrer die Schüler, wie sie zu Beginn der Übung zu dritt in dem auf dem Boden aufgeklebten Koordinatensystem standen, an die Tafel, wobei jeder Schüler in einer anderen Farbe dargestellt wird. Analog dazu wird eine Funktion f (z. B. $f(x) = x^2$) an zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen gespiegelt und diese ebenfalls jeweils entsprechend eingefärbt. Zunächst wird die Funktion f im ersten Quadranten (siehe Grafik) an der y-Achse gespiegelt. Man erhält die Funktion $f(-x)$. Diese wird wiederum an der x-Achse gespiegelt und man erhält die Funktion $-f(-x)$. Der Zusammenhang, dass für achsensymmetrische Funktionen $f(-x) = f(x)$ gilt, sowie für punktsymmetrische Funktionen $f(-x) = -f(x)$, wird somit verdeutlicht. Diese Übung mit dem zugehörigen Tafelaufschrieb (Grafik) ist nach dem E-I-S-Prinzip von Bruner aufgebaut. Es werden also alle drei Darstellungsebenen erfasst: enaktiv (handelnd), ikonisch (bildlich) und symbolisch (formal).





Hintergründe

Vorbereitung

Die Bedeutung der Bühne

Die meisten Klassenzimmer sind schmutzig. Alles, was auf dem Boden liegt, wird in die Übung mit einbezogen, denn nach dem gestaltpsychologischen Gesetz der Nähe werden alle nahe beieinander liegenden Gegenstände als zusammengehörig empfunden. Deshalb muss zunächst alles, was ablenken könnte, entfernt werden. Hierbei muss jeder, inklusive Lehrer, sich beteiligen, da jeder gleichermaßen für die Lernumgebung verantwortlich ist. Auf diese Weise kommt die Wertschätzung der Bühne zur Geltung.

Phase 1

Geodreieck als Helfer

Durch die Korrekturen der Mitschüler wird die Spiegelung immer genauer. Sollten die Schüler zur genaueren Kontrolle ein Hilfsmittel einfordern, so bietet sich an, an dieser Stelle das (Tafel-)Geodreieck einzuführen. Erst durch das Problem selbst, welches ein genaueres Messen erfordert, erhält das Messinstrument seine Daseinsberechtigung. Das Instrument wird also nicht künstlich eingeführt, sondern von den Schülern selbst aus der Situation heraus eingefordert.

Warum über Achsensymmetrie zur Punktsymmetrie?

Da die Punktsymmetrie für Schüler abstrakter ist als die Achsensymmetrie, ist es sinnvoll, den „Umweg" über die zweifache Achsenspiegelung zu gehen. Achsensymmetrie ist ein Phänomen, welchem die Schüler überall im Alltag auf natürliche Weise begegnen und welches dadurch intuitiver ist. Durch die zweifache Achsenspiegelung ist es möglich Punktsymmetrie einzuführen, ohne dass dies den Schülern zunächst bewusst ist. Somit können die Schüler selbstentdeckend lernen. Der zweite Schüler fungiert als Hilfestellung, da er das Zwischenbild visualisiert, welches sich der dritte Schüler im zweiten Teil der Übung vorstellt.

Phase 2

Fehler finden

Durch das Einbauen von Fehlern wird das Verständnis der Schüler für Punktsymmetrie abgefragt. Zudem können die Schüler erkennen, dass es zwei Möglichkeiten gibt, den eingebauten Fehler wieder zu korrigieren. Zum einen kann die Veränderung wieder an dem Schüler rückgängig gemacht werden, an dem sie ursprünglich vollzogen wurde, zum anderen kann dies auch an seinem Spiegelbild passieren. In beiden Fällen ist das Ergebnis dasselbe: die Spiegelpartner stehen sich wieder punktsymmetrisch gegenüber.

Applaus, Prüflinge und Prüfer

Durch das Klatschen stimmen die Mitschüler der Korrektur zu. Die Bestätigung erfolgt dabei nicht durch den Lehrer, sondern durch die Klasse selbst.

Es findet somit ein Rollenwechsel für die Schüler von Prüflingen zu Prüfern statt. Jeder muss sich also mit der Korrektur befassen und wird daher in das Geschehen mit einbezogen. Dadurch werden vom Lehrer auch indirekt alle abgefragt, ohne dass ein einzelner bloßgestellt wird. Das Klatschen stellt zudem eine Wertschätzung gegenüber dem agierenden Schüler dar. Die gemeinsame Bekräftigung stärkt überdies die Gruppe.

Durch einen Wechsel der agierenden Gruppe wird jedem Schüler gleichermaßen die Möglichkeit gegeben, sowohl die Rolle des Prüfers, als auch die Rolle des Prüflings zu übernehmen. Die Schüler können Punktsymmetrie dabei direkt durch eigenes Handeln erleben, als auch indirekt durch Korrektur der anderen einüben.

Phase 3

Gesetz der Ähnlichkeit

Das Tafelbild ist nach dem gestaltpsychologischen Gesetz der Ähnlichkeit aufgebaut. Der Schüler in Quadrant I wird in der gleichen Farbe wie die Funktion *f* in Quadrant I eingefärbt. Entsprechend werden dann auch die Schüler und Funktionen in den anderen Quadranten gleichfarbig eingezeichnet. Durch die gleichen Farben wird die entsprechende Zugehörigkeit verdeutlicht, so dass die Übertragung auf die formale Mathematik leichter fällt.

E-I-S-Prinzip

Das E-I-S-Prinzip besagt, dass mathematische Zusammenhänge auf drei Darstellungsebenen dargestellt werden sollten: **e**naktiv (handelnd), **i**konisch (bildlich) und **s**ymbolisch (formal). Bei dieser Übung wird der Zusammenhang zwischen zweifacher Achsenspiegelung zur Punktspiegelung zunächst handelnd entdeckt (Schüler im aufgeklebten Koordinatensystem). Danach wird es von dem Lehrer ikonisch an die Tafel gezeichnet (Parabeln im Koordinatensystem) und schlussendlich durch die Zuordnungsvorschrift (symbolisch) ergänzt. Durch die drei Ebenen können die Schüler den Sachverhalt besser verinnerlichen, da mehrere Wahrnehmungsebenen angesprochen werden.

3.5 Erste Schritte im Koordinatensystem

Daniela Pfeifer und Lisa Eberle

Das Koordinatensystem wird, angelehnt an das E-I-S-Prinzip von Bruner, handelnd eingeführt.

Konkrete Umsetzung

Phase 1

Handelndes Einführen des Koordinatensystems

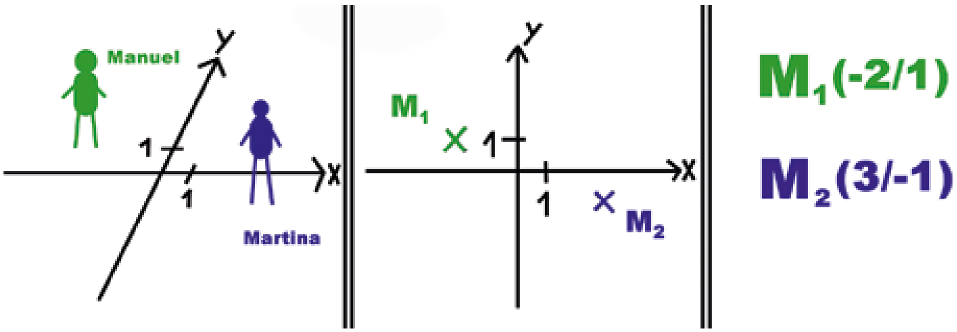
Der Lehrer markiert mit Kreppband ein Koordinatensystem auf dem Boden. Die x- und y-Achse reicht jeweils von – *5* bis + *5*. Jeder Schüler sucht sich einen ganzzahligen Punkt aus und stellt sich dort in das Koordinatensystem. Die Blickrichtung ist dabei die positive y-Richtung. Mit der linken Hand zeigt jeder Schüler den x-Wert seines Punktes an, mit der rechten Hand den y-Wert. Die Anzahl der gezeigten Finger entspricht der jeweiligen Zahl, wobei negative Zahlen nach unten gezeigt werden. Die Schüler vergleichen dabei ihre linke Hand mit den Schülern vor und hinter sich, ihre rechte Hand mit den Schülern links und rechts von sich.

Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden

Jetzt vertauschen die Schüler die Zahlen ihrer Hände und nehmen die neuen Koordinaten ein. Diejenigen, welche im Punkt (a|b) standen, stellen sich daher nun an den Punkt (b|a). Sie machen sich anhand der ortsfesten Schüler Gedanken, inwiefern sich dies als Spiegelung begreifen lässt.

Darstellung und Benennung von Punkten im Koordinatensystem

In einer neuen Übung stellt sich eine Person auf einen (ganzzahligen) Punkt des Koordinatensystems und zeigt dessen Koordinaten wieder mit seinen Fingern an.



handelnd (enaktiv) bildlich (ikonisch) formal (symbolisch)

Die drei Repräsentationsebenen werden durch das gestaltpsychologische Gesetz der Gleichzeitigkeit in Beziehung gesetzt. Hier in der Abbildung wird zusätzlich das Gesetz der Ähnlichkeit mittels Farbcodierung verwendet.

Phase 2

Schüler entwerfen eine Aufgabe

Zur Weiterführung wird im Folgenden eine Aufgabe selbst entworfen, indem einige Schüler nacheinander je einen Punkt im Koordinatensystem einnehmen. Dabei wird beginnend beim ersten Schüler eine Schnur weitergereicht. Die Punkte, an welchen sie sich befinden, werden an die Tafel geschrieben und mit dem Anfangsbuchstaben ihres Namens benannt (gegebenenfalls mit Indizes). Als Hausaufgabe sollen diese Punkte dann in ein Koordinatensystem gezeichnet und in der aufgeschriebenen Reihenfolge verbunden werden.

Hintergründe

Phase 1

Anzeigen der Koordinaten mit den Händen

Das Anzeigen mit den Händen veranschaulicht den Schülern, wo genau sie im Koordinatensystem stehen sollen. Durch das Benutzen beider Hände wird eine Differenzierung zwischen den beiden Achsen möglich. Der Vergleich der eigenen Koordinaten mit denen der anderen Schüler ermöglicht es, sich selbst zu korrigieren. Jeder hat die Möglichkeit zur Selbstkontrolle, ohne dass Einzelne abgefragt und unter Umständen bloßgestellt werden.

Erste Winkelhalbierende

Durch das Vertauschen der Koordinaten wird den Schüler handelnd gezeigt, dass dies der Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden entspricht. Dazu fordert der

Lehrer die ortsfesten Schüler auf, sich durch Strecken erkennen zu geben. Die Spiegelachse wird durch diese sehr anschaulich. Da hierbei sehr viel diskutiert werden kann, bietet es sich an, diese Übung vor einer Pause durchzuführen.

Das E-I-S-Prinzip

Die obige Übung geht auf das E-I-S-Prinzip von Bruner zurück. Dabei werden die drei Darstellungsebenen berücksichtigt. Ein Schüler im Koordinatensystem (**e**naktiv) wird auf ein zweidimensionales Koordinatensystem (**i**konisch) übertragen und dessen Koordinaten (**s**ymbolisch) formal beschrieben. Durch die drei Darstellungsebenen werden mehrere Wahrnehmungsebenen angeregt und somit die Aufnahmefähigkeit der Schüler verbessert.

Benennung der Punkte

Durch das Benennen der Punkte mit den Anfangsbuchstaben der jeweiligen Schüler wird ein persönlicher Bezug zum formalen Aufschrieb hergestellt. Sollten Verschiedene den gleichen Anfangsbuchstaben haben, bietet sich die Einführung von Indizes auf natürliche Weise an. Der Nutzen von Indizes wird den Schülern intuitiv bewusst.

Phase 2

Selbstentwurf von Aufgaben

Durch das Selbstentwerfen von Aufgaben erhalten die Schüler einen persönlichen Bezug zur Aufgabe. Die Identifizierung eines Punktes mit einem Mitschüler, sowie der Selbstentwurf der entstandenen Figur, verstärkt dies noch. Die Aufgabe wurde dabei nicht „künstlich“ erzeugt, sondern von den Schülern selbst gestaltet. Das Übertragen der Koordinatenpunkte kann selbst überprüft und gegebenenfalls korrigiert werden, da die Figur, welche beim Verbinden der Punkte in der vorgegebenen Reihenfolge entsteht, bereits bekannt ist.

4 Geometrie der Fläche

4.1 Einführung in die Kongruenz

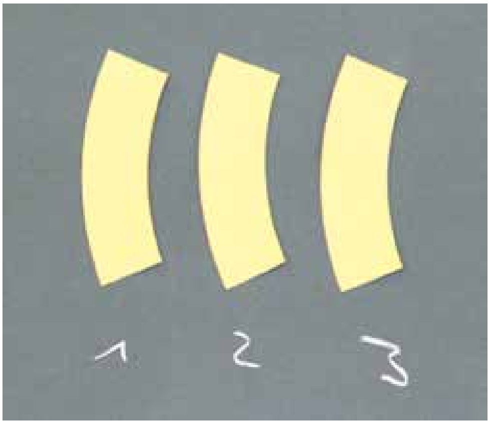
Vanessa Hofmann und Melanie Marianek

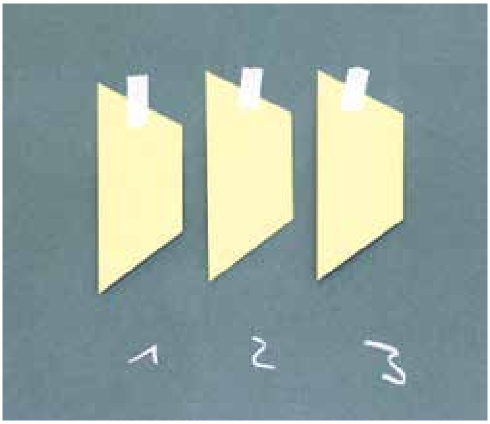
Phase 1: Über eine optische Täuschung wird Deckungsgleichheit eingeführt

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer heftet drei identische Figuren nebeneinander an die Tafel und nummeriert diese anschließend. Die Schüler entscheiden, welche der Figuren die größte ist und geben ihre Antwort nonverbal durch Anzeigen mit den Fingern. Anschließend geben sie mit den Fingern an, wie sicher sie sich mit ihrer Antwort sind – ein Finger entspricht zehn Prozent.

Zur Überprüfung werden die drei Figuren übereinander gelegt.





Der Vorteil der Trapeze besteht darin, dass sie sich leicht mit Hilfe einer Schneidemaschine anfertigen lassen.

Hintergründe

Deckungsgleichheit und Täuschungseffekt

Die Schüler werden durch den Effekt der optischen Täuschung darauf sensibilisiert, dass ein bloßes Hinsehen alleine nicht ausreicht, um Deckungsgleichheit zu zeigen – es muss Maß genommen werden. Die optische Täuschung sorgt so für einen interessanten Einstieg in das neue Thema.

Phase2: Im Baumarkt – Was braucht es zur Deckungsgleichheit?

Konkrete Umsetzung

Zwei Schüler befinden sich möglichst weit voneinander entfernt im Klassenzimmer – der eine befindet sich „im Baumarkt", der andere ist „zu Hause". Beide bekommen jeweils einen Zollstock und ein Dreieck aus Papier, welche sich geringfügig unterscheiden. Die Dreiecke stellen Fliesen dar. Im Baumarkt sollen weitere Fließen des Typs von „zu Hause" gekauft werden. Hierzu muss die Deckungsgleichheit überprüft werden. Durch Zurufen im Raum wird ein Telefongespräch simuliert.

Im nächsten Durchgang werden zwei identische Dreiecke verwendet. Jedoch wurde von einem eine Ecke abgerissen. Dieses Dreieck stellt eine kaputte Fliese von „zu Hause" dar.

Die Schüler benötigen in der Übung zum Winkelmessen auch ein Geodreieck. Auf diese Idee sollen sie allerdings selbst kommen.

Hintergründe

Kongruenzsätze

Schüler erarbeiten selbstständig die Kongruenzsätze (möglicherweise sss und wsw). Hierbei erörtern sie in der Gruppe, ob die Informationen bisher ausreichend sind, um Deckungsgleichheit zu garantieren, beziehungsweise ob zu viele Informationen ausgetauscht worden sind.

Lernumgebung schafft eine reale Situation

Durch die Lernumgebung werden die Kongruenzsätze nicht „von außen" aufgesetzt. Vielmehr wird durch die gespielte Situation ihre Notwendigkeit ersichtlich.

Verwendung von Materialien am Beispiel Geodreieck

Die Schüler stellen selbst fest, dass die vorhandenen Materialien nicht ausreichen. Sie benötigen zusätzliche Hilfsmittel – in diesem Fall ein Geodreieck.

Formalität

Zum Vergleich der Informationen sind Zahlen nötig – die Deckungsgleichheit wird formal erfasst.

4.2 Zentrische Streckung und das eigene Spiegelbild

Lena Brinkmann, Melanie Haas und Daniel Kilchling

Anhand des Spiegelbilds wird die zentrische Streckung eingeführt.

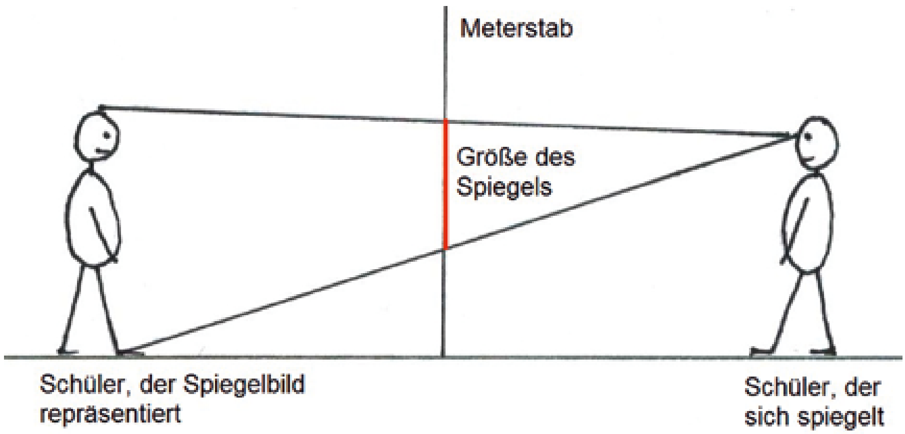
Konkrete Umsetzung

Jede Farbgruppe bestimmt einen Materialwart, welcher einen Spiegel, einen abwaschbaren Stift und ein Papiertuch für die Gruppe besorgt. Zwei Schüler aus der Farbgruppe halten den Spiegel an die Wand, sodass ein dritter darin sein Gesicht sehen kann. Dieser schließt ein Auge und zeichnet die Konturen seines Gesichts auf dem Spiegel nach.

Anschließend geht er mehrere Schritte zurück – immer noch mit einem geschlossenen Auge – um herauszufinden, ob sich sein Spiegelbild verändert. Er stellt fest, dass sein Gesicht immer noch exakt in den auf den Spiegel gezeichneten Umriss passt. Nacheinander darf sich jeder aus der Farbgruppe spiegeln, um zu der oben genannten Feststellung zu kommen. Im Anschluss soll das Phänomen von den Schülern selbst erklärt werden.

Eine mögliche Erklärung

Ein Schüler hält einen Meterstab, der den Spiegel repräsentiert. Zwei weitere stellen sich mit dem Blick zueinander in gleicher Entfernung von dem Meterstab auf. Dabei stellt einer den Menschen, der andere dessen Spiegelbild dar. Nun werden von den Augen des Schülers, der sich spiegelt, zwei Schnüre gespannt. Die eine führt zum Kopf des Schülers, der das Spiegelbild darstellt, die andere zu seinen Füßen (vgl. Abbildung unten). Auf diese Weise lässt sich feststellen, wie groß der Spiegel sein muss, damit man sich vollständig darin sieht. Markiert man nun beide Punkte, an denen die Schnüre den Meterstab schneiden und bewegen sich dann beide Schüler gleichermaßen vom Spiegel weg, sieht man, dass die Schnittpunkte dieselben bleiben. Die Aufstellung stellt eine zentrische Streckung mit Streckfaktor $k = 2$ dar.



Hintergründe

Mathematischer Alltagsbezug

Die Schüler können das mathematische Konzept der Ähnlichkeit konkret und aktiv erleben. Zudem steckt in der haptischen Erklärung nicht nur der Aspekt der Ähnlichkeit: anhand dieses Experimentes lassen sich auch die Strahlensätze anschaulich einführen oder wiederholen. Ebenso verhält es sich mit der zentrischen Streckung, die hier dargestellt wird.

Schülerzentrierung und Rolle des Lehrers

Der Spiegel ist ein Alltagsgegenstand, den jeder häufig benutzt. Dennoch sind sich viele nicht im Klaren darüber, dass die Größe des Spiegelbilds sich nicht mit zu- oder abnehmender Entfernung ändert. Diese Feststellung kommt für die Schüler überraschend, wodurch die intrinsische Motivation erhöht wird. Zudem können sich die Schüler dadurch aktiv mit dem Thema beschäftigen, ohne dass die Lehrperson überhaupt einen konkreten Arbeitsauftrag stellen muss.

Die Lehrperson tritt somit in den Hintergrund der Unterrichtsstunde, wird zum Moderator und ist nicht mehr in der Rolle des Beschulenden. Dagegen rückt der Stoff ins Zentrum der Unterrichtseinheit. Durch das Selbstnachzeichnen des eigenen Gesichts entsteht der Anreiz, das Phänomen verstehen und erklären zu wollen. Damit wird die Grundlage für eine aktive Beteiligung gelegt.

Im Idealfall sollte von den Schülern selbst eine Lösung des Problems kommen. Übernimmt die Lehrperson diese Rolle, besteht die Gefahr, dass die zuvor erreichte Aktivität wieder verloren geht. Die Lehrperson würde aus dem Hintergrund wieder in den Mittelpunkt der Unterrichtsstunde rücken. Die erläuterte mögliche Erklärung des Phänomens hat den Vorzug, dass die Schüler sie handelnd erleben. Des Weiteren bietet sie sich zur Wiederholung am Anfang der nächsten Unterrichtsstunde an.

4.3 Zentrische Streckung II

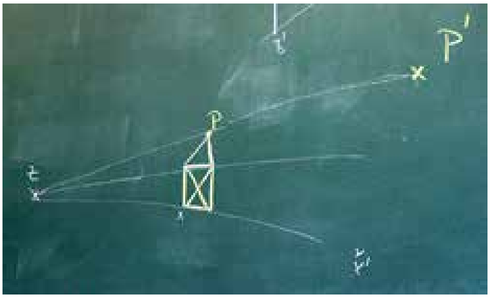
Carolin Heinrich, Christian Marschner und Corinna Lukas

Schüler vergrößern auf dem Pausenhof eine Figur

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer führt an der Tafel die zentrische Streckung an einem Beispiel mit dem Streckfaktor $k = 2$ durch. Anhand dieses Beispiels wird auch der Arbeitsauftrag erklärt:

Aufgabe der Schüler ist es, in Kleingruppen auf dem Pausenhof eine Figur mit farbiger Kreide aufzuzeichnen und diese um einen Streckfaktor k zu vergrößern.



Als geometrische Hilfsmittel stehen den Schülern Schnur sowie ein Zollstock zur Verfügung.

Haben sie die Figur aufgezeichnet, wird ein beliebiger Bildpunkt von einem Gruppenmitglied bestimmt. Ein anderes Gruppenmitglied wählt eine beliebige Zahl zwischen 3 und 7,5 als Streckfaktor. Damit kann das Zentrum bestimmt, und so die Figur gestreckt werden. Die Konstruktion und die Hilfslinien werden mit weißer Kreide gezeichnet.

Nach Ablauf der Zeit trifft sich die Klasse im Kreis. Es wird besprochen, wie beispielsweise der Streckfaktor anhand der Konstruktion durch Messen, beziehungsweise „Abschreiten" der sich entsprechenden Längen, in den Figuren ermittelt werden kann. Wichtig ist hierbei, darauf hinzuweisen, dass die Strecken immer vom Streckzentrum aus abgeschritten werden müssen. Dies wird häufig von Schülern missachtet.

Nun sollen die Schüler in den Kleingruppen den Streckfaktor der jeweils anderen Gruppen ermitteln.

Hintergründe

Lernumgebung im Freien

Das Verlegen des Unterrichts ins Freie ermöglicht das Wahrnehmen einer völlig neuen Lernumgebung gegenüber dem Unterricht im Klassenzimmer.

Eine andere Art von Gruppenarbeit ist aufgrund der veränderten Akustik möglich. Die Gruppen arbeiten unabhängiger voneinander, da die jeweilige Gruppe nicht hört, wie die anderen Gruppen bei der Aufgabe vorgehen.

Außerdem wecken die Zeichnungen auch bei anderen Schülern oder Passanten Interesse. So können sie ihre neu erworbenen Erkenntnisse direkt an andere weitergeben. Schüler sind im Allgemeinen begeistert von Unterricht im Freien, da es eine schöne Abwechslung zum Schulalltag darstellt.

Zentrische Streckung haptisch erfahren

Die Konstruktion wird mit einem Erlebnis verbunden und bleibt so besser im Gedächtnis. Durch das „Abschreiten“ der Figuren durch die Schüler wird das Messen vom Streckzentrum aus auf kinästhetische Weise verinnerlicht. So wird einer häufigen Fehlerquelle bei Schülern entgegengewirkt.

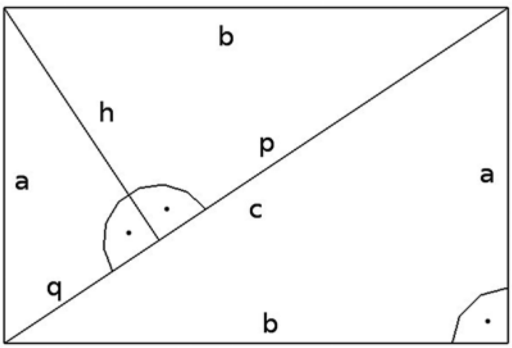
Des Weiteren sorgen die großen Kreidezeichnungen auf dem Schulhof dafür, dass die Konstruktion besser im Gedächtnis bleibt, da man noch mehrmals mit ihr in Kontakt kommt (z. B. auf dem Nachhauseweg).

4.4 Satz des Pythagoras

Lisa Otto, Hauke Lehmann und Michael Esser

Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten für einen anschaulichen Beweis des Satzes des Pythagoras vorgestellt.

Konkrete Umsetzung – Erster Beweis über Ähnlichkeit

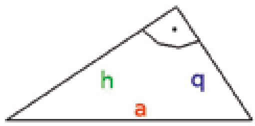


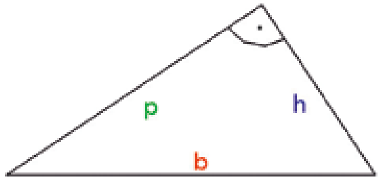
Für diesen Beweis werden ein Din A4 Blatt und eine Schere benötigt.

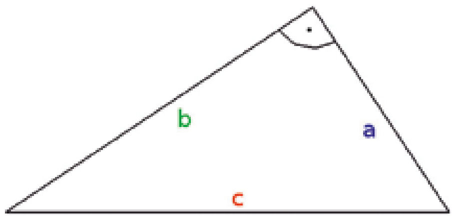
Die Schüler bekommen zunächst die Aufgabe gestellt, ihr Din A4 Blatt in drei ähnliche Dreiecke zuzuschneiden, ohne dass am Ende ein Rest übrig bleibt.

An dieser Stelle ist zu zeigen, dass diese Aufteilung auch wirklich drei ähnliche Dreiecke hervorbringt. Dazu ist zu zeigen, dass alle drei Dreiecke dieselben Winkel haben. Alle drei Dreiecke besitzen einen rechten Winkel, die restlichen Winkel lassen sich nun einfach durch die Winkelsumme im Dreieck nachweisen.

Wenn man die Dreiecke der Größe nach untereinander legt, lassen sich wegen ihrer Ähnlichkeit die Strahlensätze anwenden. Folgende Sätze lassen sich über Ähnlichkeit herleiten:







Kathetensätze

$$\frac{b}{c} = \frac{p}{b} \Leftrightarrow b^2 = c \cdot p$$

$$\frac{a}{c} = \frac{q}{a} \Leftrightarrow a^2 = c \cdot q$$

Satz des Pythagoras

$$b^2 = c \cdot p \qquad a^2 = c \cdot q$$

(nach Kathetensätze)

$$\xrightarrow[\text{Addition}]{} \quad a^2 + b^2 = c \cdot q + c \cdot p = c\underbrace{(q + p)}_{c} = c^2$$

Exkurs

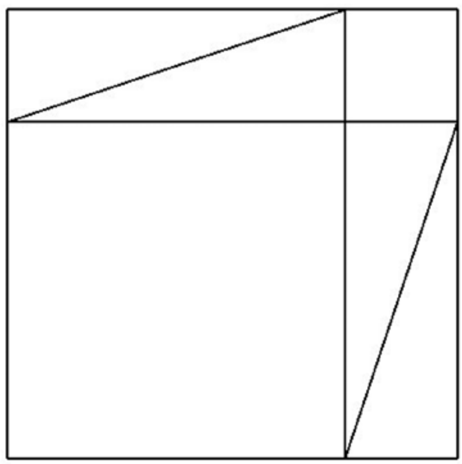
Zusätzlich ergibt sich mit obiger Skizze auf einfache Weise der Höhensatz.

Höhensatz

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h} \Leftrightarrow \mathrm{h}^2 = \mathrm{q} \cdot \mathrm{p}$$

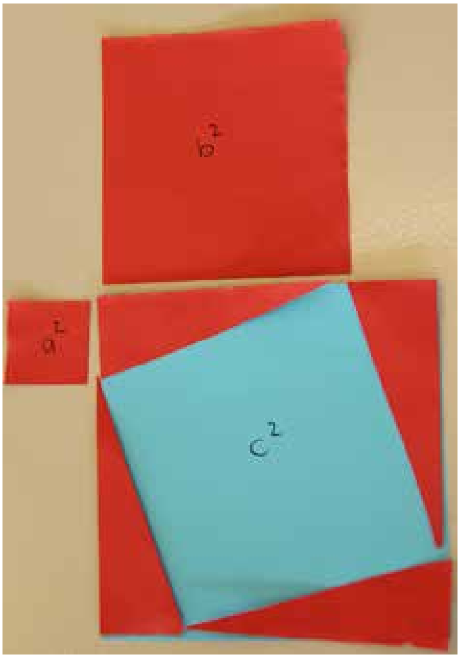
Konkrete Umsetzung – Zweiter Beweis über Flächeninhalt

Für den alternativen Beweis benötigt man neben einer Schere zwei verschieden farbige, quadratische und gleich große Blätter. Die Lehrkraft gibt zunächst die Anweisung, einen der beiden Zettel wie in nebenstehender Skizze zu zerschneiden. Der Schüler hat dabei die Wahl der Streifenbreite. Legt man alles wie im Bild gezeigt, erkennt man bereits den Beweis.



Es bleibt noch zu zeigen, dass das sichtbare Viereck des zweiten Zettels auch wirklich ein Quadrat darstellt und somit den Flächeninhalt c^2 hat.

Beweisidee:
Die vier Seiten des Vierecks sind per Konstruktion schon gleich lang. Die vier Innenwinkel lassen sich leicht mit Hilfe von Winkelsummen und Nebenwinkeln bestimmen. Dies bleibt dem Leser überlassen.



Hintergründe

Haptischer Lösungsweg

Die Schüler können beim zweiten Beweis etwas anfassen und können ihn selber mitgestalten.

Darüber hinaus werden durch das Material die einzelnen Beweisschritte anschaulich nachvollziehbar, wie zum Beispiel der Winkelvergleich für die Ähnlichkeit der Dreiecke.

Vergleich der beiden Beweise

Dieser zweite Beweis benötigt nur sehr wenig mathematisches Wissen und ist daher für die Schüler vielleicht leichter verständlich. Er braucht aber das Konzept des Flächeninhaltes. Den ersten Teil dieses Beweises könnte man mit den Schülern sogar ganz, ohne den im ersten Beweis benötigten Stoff durchgenommen zu haben, durchführen.

Das Variable im Konkreten

Unser Gehirn braucht zum Lernen konkrete Beispiele. Im Fall des zweiten Beweises werden solche durch die unterschiedliche Streifenbreite der beiden Nebensitzer geliefert. Die Schüler beobachten, dass der Beweis unabhängig von der verwendeten Breite funktioniert. So können die Schüler das Variable im Konkreten lernen.

4.5 Vom Parallelogramm zum Dreieck und Trapez

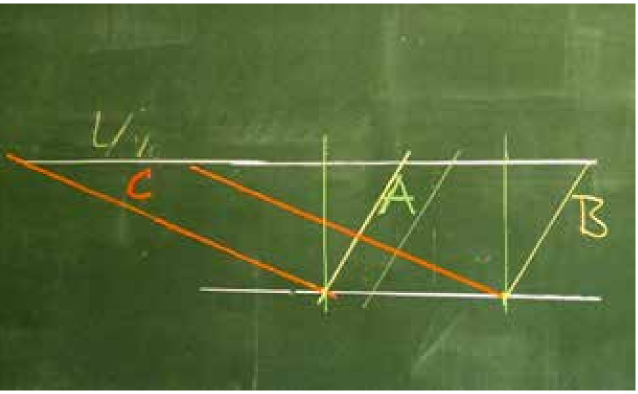
Sophia Sommer, Sarah Dietze und Norman Dold

Der folgende Abschnitt soll eine Möglichkeit zur Einführung der Flächeninhalte von Parallelogramm, Dreieck und Trapez aufzeigen. Dabei geht es vor allem um deren Beziehung: Aus dem Parallelogramm entsteht das Dreieck und das Trapez. Es besteht eine materielle Verwandtschaft, welche von den Schülern entdeckt wird.

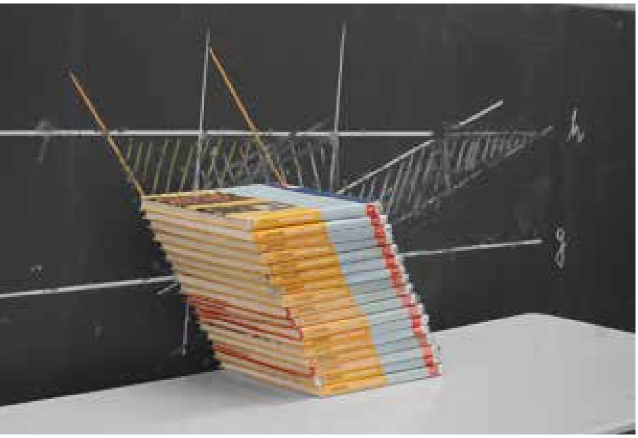
Konkrete Umsetzung

Flächeninhalt des Parallelogramms

Die Schüler kennen bereits den Flächeninhalt eines Rechtecks. Nun wird der Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmt. Dazu zeichnet der Lehrer zwei Parallelen an die Tafel, zwischen denen sich drei unterschiedliche Parallelogramme durch die Punkte *p* und *q* befinden. Eines davon ist ein Rechteck. (Tipp: Wegen dem nachfolgenden Beweis werden *p* und *q* im Abstand einer Bücherlänge eingezeichnet.)



Ziel ist es nun, dass sie erkennen, dass das Parallelogramm ein „schiefes Rechteck“ ist und damit denselben Flächeninhalt hat. Sie werden also aufgefordert, sich zu entscheiden, welches der drei Parallelogramme das größte ist. Eine Möglichkeit, um die Gleichheit der Flächeninhalte zu beweisen, ist das Verschieben eines Bücherstapels[10]. Dazu decken die Schüler die Fläche mit einem Stapel aus ihren Mathebüchern auf einem Tisch vor der Tafel ab. Dann werden die Bücher so verschoben, dass sie das Parallelogramm B überdecken. Offensichtlich bleiben Höhe und Flächeninhalt gleich. Die Schüler sehen so direkt, dass die zwei Parallelogramme B und C den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck haben, und es ergibt sich die Formel $A = g \cdot h$.



Häufig kommen die Schüler auf eine weitere Möglichkeit die Gleichheit der Parallelogramme zu zeigen: durch Ausfüllen der unterschiedlichen Flächen mit Papierschablonen.

Vom Parallelogramm zum Dreieck

Der nächste Schritt ist der Übergang zum Flächeninhalt des Dreiecks. Dazu schneiden die Schüler einen beliebig breiten, parallelen Streifen längs einer Schulheftseite ab und leihen sich dann den Streifen des Partners als Schablone, um

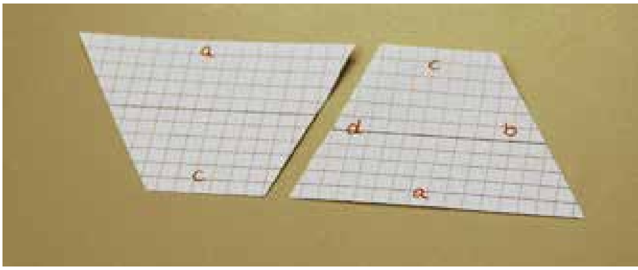
10 Bildquelle: Kramer, Martin (2013): Mathematik als Abenteuer Band 1: Geometrie und Rechnen mit Größen. Hallbergmoos: Aulis. S.41

so ein Parallelogramm im oberen Drittel ihres Streifens einzuzeichnen. Der Rest des Streifens wird für später aufbewahrt. Dieses Vorgehen ist genau im Sinne der Definition eines Parallelogramms. Das Parallelogramm wird ausgeschnitten und mittig von einer Ecke zur gegenüberliegenden durchschnitten. So entstehen zwei Dreiecke. Wenn man eines der beiden umdreht, erkennt man, dass sie deckungsgleich sind. Die Schüler haben nun also zwei gleichgroße Dreiecke in der Hand, die aus einem Parallelogramm entstanden sind, und können sich so sofort die Formel für deren Flächeninhalt aus der des Parallelogramms herleiten.

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h$$

Vom Parallelogramm zum Trapez

Nun nehmen die Schüler den übriggebliebenen Streifen hervor, falten diesen einmal in der Mitte und schneiden ihn beliebig zweimal quer durch. Es entstehen zwei gleichgroße Trapeze, die man zu einem Parallelogramm aneinander legen kann. Nachdem die Schüler die Seiten des Trapezes beschriftet haben, können sie selbstständig die Formel für dessen Flächeninhalt herleiten.



$$A = \frac{c + a}{2} \cdot h$$

So erleben die Schüler, wie das Dreieck und Trapez aus dem Parallelogramm hervorgehen und erkennen deren Verwandtschaftsbeziehung.

Hintergründe

Material und Heftaufschrieb

Die Streifen, die die Schüler zu Beginn aus dem eigenen Schulheft herausschneiden, haben unterschiedliche Breiten. Somit wird klar, dass die hergeleitete Formel für beliebige Maße gilt. Gleichzeitig dient die verschmälerte Heftseite als Protokoll.

Das Konstruieren eines Parallelogramms durch Schneiden und Zeichnen in Partnerarbeit ist für das aktive Wissen der Schüler ein deutlich besserer Grundstein als das Konstruieren mit dem Geodreieck. Ebenso wertvoll ist es, wenn die Kinder an der Tafel durch Ausprobieren und gemeinsame Diskussionen damit beginnen, mathematische Beweise zu führen.

Die Formel – ein Geschenk

Ziel ist es, dass die Formel als Geschenk empfunden wird. Die Schüler sollen verstehen, dass sie deutlicher, kürzer und einfacher ist, als eine Ausformulierung der Berechnung. Durch eigenständiges Ausprobieren entdecken sie die Formel selbst und lassen sich auf sie ein. Sie werden über den Weg des Beschreibens an die Formel herangeführt, damit sie den Sachverhalt dahinter verstehen und das stupide Auswendiglernen überflüssig wird. Haptisches und bildhaftes Vorgehen bleibt nachhaltig im Kopf.

4.6 Bau eines Sextanten zur Bestimmung der Höhe des Schulgebäudes

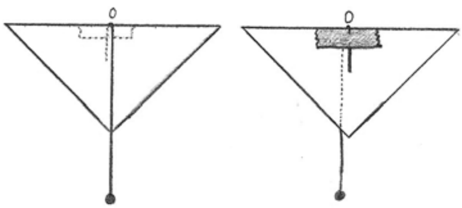
Laura Brose und Jessica Otawa

Die Höhe des Schulgebäudes wird mit Hilfe eines selbstgebauten Sextanten bestimmt. Voraussetzungen sind die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck.

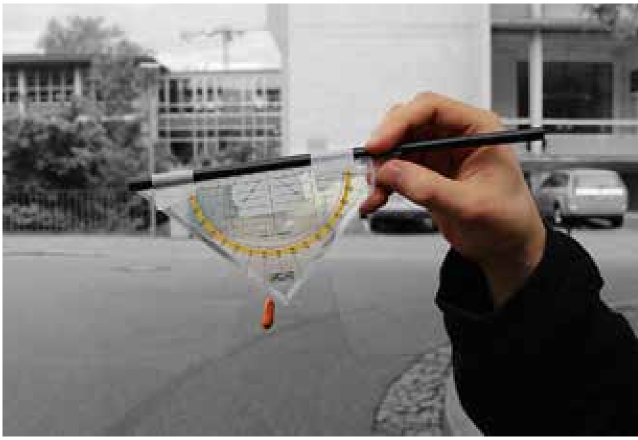
Konkrete Umsetzung

Phase 1: Bau des Sextanten

In zuvor eingeteilten Gruppen (z. B. Farbgruppen) wird ein Sextant gebaut. Benötigt werden ein Geodreieck, ein Strohhalm, ein Zollstock, Kreppband, Knete und ein Haar. Jede Gruppe befestigt mit dem Klebeband ein langes Haar (schön anzusehen ist, wenn Jungen ihre Mitschülerinnen darum bitten) genau in der Mitte des Geodreiecks, also auf der Null. Hierfür wird ein Stück des Haares auf die andere Seite des Geodreiecks umgeklappt und nur dort angeklebt (wie in der Abb.). Am längeren Ende des Haares befestigen die Schüler nun ein Stück der Knete, das sie zu einer Kugel geformt haben, um das Haar zu beschweren und somit ein Pendel entstehen zu lassen. Jetzt bringen die Schü-



ler den Strohhalm mit Klebeband entlang der Hypotenuse an. Auch hier darf das Haar nicht überklebt werden, damit es frei pendeln kann. Schauen die Schüler durch den Strohhalm und fixieren dabei den höchsten Punkt des Gebäudes, können sie anhand des Haares den Winkel ablesen, in dem sie zum Haus stehen.

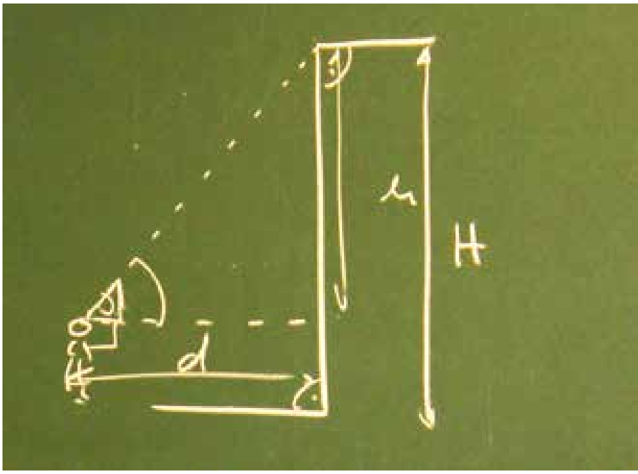


Achtung: Verletzungsgefahr! Die Spitze des Geodreiecks ist gefährlich für das Auge, deshalb muss die Spitze mit einem Finger abgedeckt werden!

Phase 2: Zwei mögliche Aufgabenstellungen

Es ist möglich, die Aufgabenstellung auf zwei unterschiedliche Weisen zu formulieren.

Für die leichtere Version zeichnet der Lehrer die nebenstehende Skizze an die Tafel und teilt den Schülern mit, dass in dieser Stunde die Höhe des Schulgebäudes mittels des selbstgebauten Sextanten und eines Zollstocks bestimmt werden soll. In der interessanteren Version dürfen die Schüler zur Bestimmung der Höhe nicht an das Schulgebäude herantreten. Dieser Umstand kann in eine Geschichte verpackt werden: Das Haus ist von einem Garten umgeben, der nicht betreten werden darf.

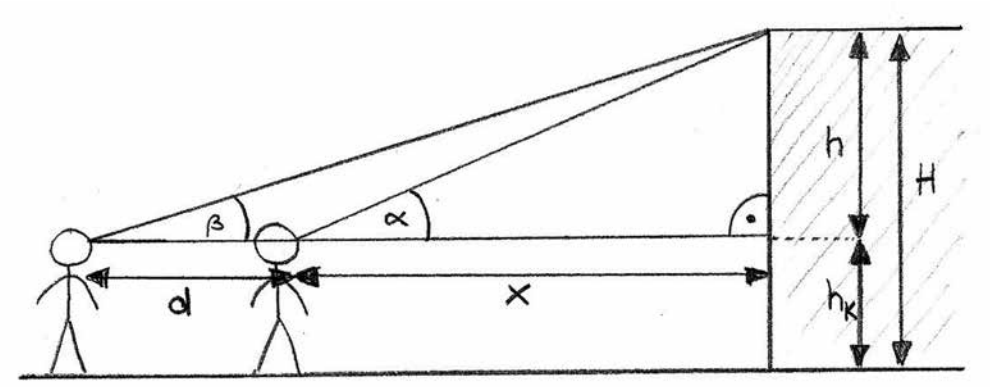


Daraufhin schreibt der Lehrer eine Uhrzeit an die Tafel, zu der die Schüler fertig sein sollen. Bei Ablauf der Zeit finden sich die Schüler wieder im Klassenzimmer ein und schreiben, unter Angabe ihrer Gruppe, ihr Ergebnis bevor sie sich wieder setzen an die Tafel.

Phase 3: Bestimmung der Gebäudehöhe

In dieser Phase werden die Schüler nun selber aktiv. Sie verlassen das Klassenzimmer, um die Aufgabe mit Hilfe des Sextanten und Zollstocks zu lösen.

Der Lehrer bespricht schlussendlich mit den Schülern die an der Tafel vermerkten Ergebnisse und fragt nach den dafür verwendeten Lösungsansätzen.



Eine mögliche Lösung für die interessante Aufgabenstellung ist die folgende:

Gesucht: $H = h + h_k$

Es gilt: $\tan(\alpha) = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow h = \tan(\alpha) \cdot x \Rightarrow x = \frac{h}{\tan(\alpha)}$ (*)

$\tan(\beta) = \frac{h}{x + d} \quad \Rightarrow h = \tan(\beta) \cdot (x + d)$ (**)

(*) in (**) einsetzen:

$$h = \tan(\beta) \cdot \left(\frac{h}{\tan(\alpha)} + d\right)$$

$$\Leftrightarrow\ h = \tan(\beta) \cdot \frac{h}{\tan(\alpha)} + \tan(\beta) \cdot d$$

$$\Leftrightarrow\ h - \tan(\beta) \cdot \frac{h}{\tan(\alpha)} = \tan(\beta) \cdot d$$

$$\Leftrightarrow\ h\left(1 - \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)}\right) = \tan(\beta) \cdot d$$

$$\Leftrightarrow\ h = \frac{\tan(\beta) \cdot d}{1 - \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)}}$$

Es ist: $H = h + h_k$ (h_k Körpergröße)

Mögliche Erweiterungen

Im Anschluss an die Besprechung der Ergebnisse kann über folgende Punkte diskutiert werden.

(1) Streuung der Messwerte

Da es unterschiedliche Ergebnisse gibt, stellt sich die Frage, wie hoch das Gebäude nun wirklich ist. Offensichtlich kennt niemand die exakte Höhe. Dennoch kann man anhand der Streuung feststellen, wie gut eine Klasse gearbeitet hat. So stehen die Messdaten 16,5 *m*, 19,0 *m*, 23,2 *m*, 13,0 *m*, 20,5 *m* für eine ungenauere Messmethode als beispielsweise bei den Messdaten 19,2 *m*, 19,6 *m*, 19,3 *m*, 19,7 *m* und 18,9 *m*.

(2) Sinnvolle Messung

An welchem Ort sollen Winkel gemessen werden? Sicherlich ergibt es wenig Sinn, den ersten Winkel in hundert Meter Entfernung und den zweiten in hundertundein Metern Entfernung zu messen.

Alternative

Es ist möglich, diese Aufgabe auch offen, ohne weitere Angaben oder vorgegebene Hilfsmittel zu stellen. Kinder einer fünften Klasse beispielsweise kommen dabei auf die unterschiedlichsten Ideen, wie man die Höhe bestimmt (z. B. mittels Schätzen, Messen der Stockwerkshöhe oder der Treppenstufenhöhe, Gebäudepläne oder aber Nachfragen beim Hausmeister[11]).

---

11 Vgl. Kramer, Martin (2013): Mathematik als Abenteuer Band 1: Geometrie und Rechnen mit Größen. Hallbergmoos: Aulis. S.224

Den Schülern soll dabei vor allem klargemacht werden, dass es viele unterschiedliche Arten gibt, zum Ziel zu gelangen. Um dies zu unterstreichen, bietet sich als Stundenabschluss folgende Anekdote an[12]:

An der Universität Kopenhagen findet ein Physik-Examen statt. Der Kandidat soll folgende Aufgabe lösen: „Beschreiben Sie, wie man die Höhe eines Wolkenkratzers mithilfe eines Barometers feststellt.“

Ohne zu überlegen antwortet der Kandidat: „Man bindet ein langes Stück Schnur an das Barometer, steigt auf das Dach des Gebäudes und lässt das Barometer an der Schnur zu Boden. Die Länge der Schnur plus die Länge des Barometers ergibt die Höhe des Gebäudes.“ Empört über die Antwort, die kein physikalisches Wissen erkennen lässt, erklären die Prüfer den Kandidaten für durchgefallen und schicken ihn hinaus. Dieser eilt daraufhin in das Büro des Prüfungsvorsitzenden und beschwert sich, weil die Antwort doch zweifellos richtig gewesen sei. Der Beschwerde wird stattgegeben, der Vorstand fordert die Prüfer auf, dem Kandidaten die Frage sofort erneut vorzulegen. Nun antwortet der Prüfling wie folgt:

„Ich habe noch fünf weitere Lösungen“:

1. *Sie steigen mit dem Barometer auf das Dach, lassen es herunter fallen und messen die Zeit t, die es braucht, um den Boden zu erreichen. Die Höhe H des Gebäudes kann mit der Formel* $H=0{,}5gt^2$ *berechnet werden. Allerdings wäre das Barometer dann kaputt.*
2. *Falls die Sonne scheint, können Sie die Länge des Barometers messen, es dann hochstellen und die Länge seines Schattens messen. Dann messen Sie die Länge des Schattens des Wolkenkratzers, anschließend brauchen Sie nur noch anhand der proportionalen Arithmetik die Höhe des Wolkenkratzers zu berechnen.*
3. *Oder, wenn der Wolkenkratzer eine außen angebrachte Feuertreppe besitzt, könnten Sie raufsteigen, die Höhe des Wolkenkratzers in Barometerlängen abhaken und oben zusammenzählen.*
4. *Wenn Sie aber bloß eine langweilige und orthodoxe Lösung wünschen, dann können Sie natürlich das Barometer benutzen, um den Luftdruck auf dem Dach des Wolkenkratzers und auf dem Grund zu messen und den Unterschied bezüglich der Millibar umzuwandeln, um die Höhe des Gebäudes zu berechnen.*
5. *Oder noch einfacher: Sie klopfen an die Tür des Hausmeisters und sagen: „Wenn Sie mir die Höhe des Wolkenkratzers nennen können, gebe ich Ihnen dafür dieses schöne Barometer.“*

12 Zitiert nach: http://www.schulen.regensburg.de/~jsch510/Verschiedenes/Bohr/von_Niels_Borhr_lernen.html (zuletzt aufgerufen am 07.06.12 um 18:17)

Bei dem Prüfling soll es sich um den späteren Physik-Nobelpreisträger Niels Bohr handeln.

Hintergründe

Binnendifferenzierung und Kompetenzen

Bei dieser Aufgabe ist es gut möglich, binnendifferenziert zu arbeiten, sodass leistungsschwächeren Schülern auch die Chance gegeben werden kann, selbstentdeckend zu lernen. Zum einen wählt der Lehrer zwischen zwei Aufgabenstellungen (leichtere oder interessantere), zum anderen bietet er Schülern, die es wollen, Hilfestellungen an. So stellt er den Schülern frei, ob sie sofort nach draußen gehen wollen, um eigene Ideen auszuprobieren, oder ob sie noch auf Lösungshinweise warten.

Außerdem wird durch die Gruppenarbeit niemand bloßgestellt und es gibt viele Möglichkeiten sich individuell, seinen Kompetenzen entsprechend, in die Arbeit einzubringen. Zum Beispiel kann ein Schüler sich dadurch hervortun, dass er besonders genau die Messwerte abliest, und ein anderer übernimmt das Umformen der Gleichungen. Gleichzeitig bleibt dem Lehrer Zeit, Schülern individuell zu helfen.

Reale Objekte

Das Vorstellungsvermögen für Größen realer Objekte wird trainiert. Schüler lernen Größen einzuschätzen und zu bewerten, wie realistisch die errechneten Werte sind. Auch wird ihnen bewusst, auf wie viele Stellen genau sie ihr Ergebnis angeben sollten, damit es im gegebenen Kontext noch sinnvoll ist.

4.7 Innenwinkelsatz eines Dreiecks

Christina Körber

Über Parkettierung wird der Innenwinkelsatz gefunden.

Zaubertrick und erste Vermutung

Konkrete Umsetzung

Jeder Schüler schneidet ein eigenes Dreieck aus. Im nächsten Schritt färben die Schüler die Ecken ihres Dreiecks in unterschiedlicher Farbe ein. Danach werden die Ecken des Dreiecks abgerissen und aneinander gelegt, so dass alle Spitzen aufeinander treffen (vgl. Abb.2). Es gleicht einem Zauber: egal welche Größe oder welche Winkel das Dreieck hat, stets ergibt sich ein Gesamtwinkel von 180 Grad.

Könnte es ein Dreieck geben, bei dem das nicht der Fall ist? Hier reichen natürlich weitere Bespiele alleine nicht, es ist ein Beweis erforderlich.


Abb. 1

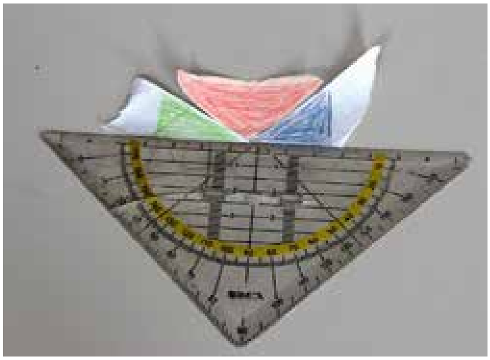


Abb. 2

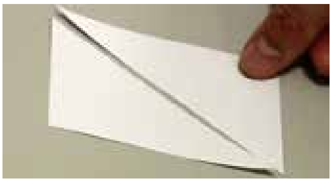
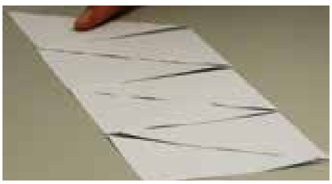
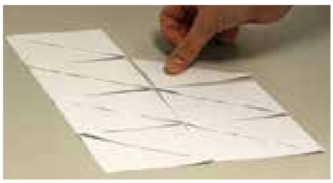
Beweis des Innenwinkelsatzes

Vorbereitung

Mit einer Papierschneidemaschine stellt der Lehrer für jede Schülergruppe ca. 20 identische Dreiecke her. Jede Gruppe sollte eine andere Dreiecksform erhalten, damit klar gestellt wird, dass folgende Beweisführung nicht an der jeweils speziellen Form liegt.

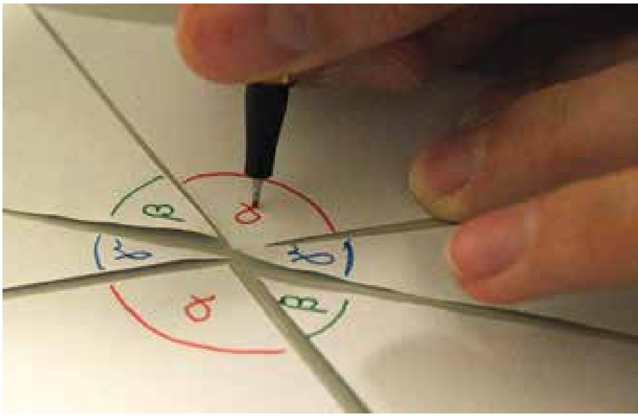
Konkrete Umsetzung

Ist es möglich mit Dreiecken eine (unendliche) Fläche zu parkettieren? Unabhängig von deren speziellen Form? Es geht immer! Nachdem die Schüler sich selbst an der Parkettierung versucht haben, wird der konstruktive Beweis schrittweise aufgeschrieben:

Zwei Dreiecke lassen sich stets zu einem Parallelogramm zusammenlegen. Hierzu wird ein Dreieck um 180° gedreht.	
Parallelogramme können zu einem unendlich langen Streifen aneinandergereiht werden.	
Mit unendlich vielen Streifen lässt sich abschließend die gesamte Ebene parkettieren.	

Beweis des Satzes

Mithilfe der Parkettierung lässt sich leicht zeigen, dass die Innenwinkel eines Dreiecks 180° ergeben. Hierzu werden die Ecken, wie bereits beim oben beschriebenen Zaubertrick, eingefärbt.



Die Winkelsumme im Vollkreis beträgt 360 Grad. Es gilt:
$\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma = 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 360°$
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Bemerkung

Dreieck als halbes Parallelogramm

Die Übung wiederholt implizit Flächenberechnungen am Dreieck. Vgl. auch den Abschnitt über die Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks als halbes Parallelogramm.

Parkettierungen im Unterricht

Das Thema Parkettierungen kann im Unterricht tiefer untersucht werden. Interessant sind platonische und archimedische Parkettierungen.[13]

13 Vgl. Martin Kramer, Mathematik als Abenteuer, Bd. 1, Aulis Verlag 2013, S. 79 ff

5 Kreis

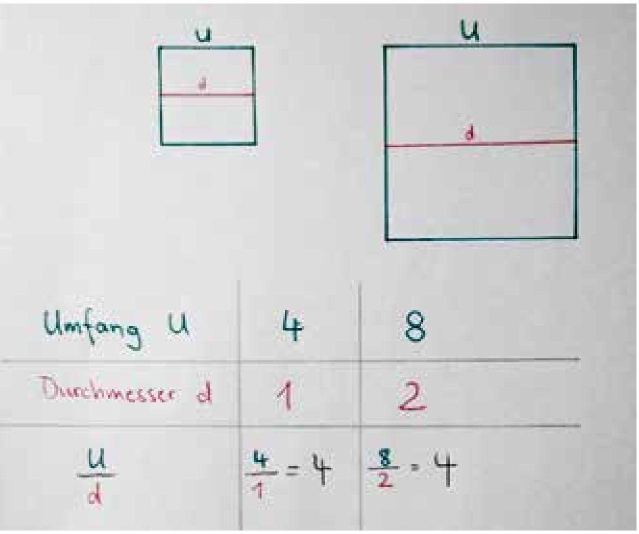
5.1 Einführung der Zahl π

Dominik Schomas

Die Zahl π wird über den konstanten Quotienten $\frac{u}{d} = \frac{\pi d}{d} = \pi$ eingeführt.
Der Umfang u sowie der Durchmesser d werden von den Schülern experimentell bestimmt und zusammen mit $\frac{u}{d}$ in einer Tabelle an der Tafel eingetragen.

Konkrete Umsetzung

Die Einführung findet an der Tafel statt, während die eigentliche Aufgabe in Gruppenarbeit behandelt wird. An der Tafel führt der Lehrer das Verfahren am Beispiel des Quadrates vor. Dessen Durchmesser ist hierbei wie im Bild dargestellt definiert.



Zentral ist, dass das Verhältnis $\frac{u}{d}$ konstant ist, ansonsten ergibt die folgende Übung, bei der das entsprechende Verhältnis am Kreis bestimmt wird, keinen Sinn. Für den Leser ist die Konstanz von $\frac{u}{d}$ z. B. aufgrund der Strahlensätze klar.

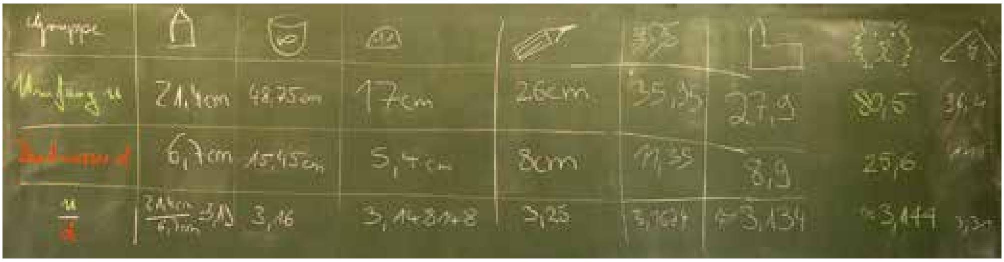
Arbeitsauftrag

Unter einer Zeitvorgabe versuchen die Schüler in Gruppen $\frac{u}{d}$ anhand eines kreisförmigen Gegenstands zu bestimmen. Als Ausrüstung erhält jede Gruppe genügend Schnur sowie einen Zollstock, wobei weitere Hilfsmittel ausdrücklich erlaubt sind.

Die Schüler suchen selbstständig im Schulgebäude nach kreisförmigen Gegenständen, an denen sie durch die Messung des Umfangs und Durchmessers den Quotienten $\frac{u}{d}$ ausrechnen. Die Ergebnisse werden in einer Tabelle an der Tafel gesammelt. Während des gesamten Vorganges wird noch nicht erwähnt, dass hierdurch π bestimmt wird.

Nach dem Zusammentragen der Ergebnisse der einzelnen Gruppen wird auf das sich abzeichnende Zahlenverhältnis eingegangen.

Zum Abschluss der Übung wird das Ergebnis mit dem Quotienten des Quadrates verglichen. Wie zu erwarten war, ist das Verhältnis beim Kreis (3,14 …) etwas kleiner als beim Quadrat, bei dem dieses vier beträgt. Niemand kennt das Verhältnis exakt, wir schrieben dafür π.



Tipps zur Durchführung

Um die Motivation zu erhöhen kann man Belohnungen (z. B. Gummibärchen) für jede richtige Nachkommastelle von π verteilen. Dies verstärkt das Bestreben, möglichst genau und sorgfältig zu arbeiten und Methoden zu entwickeln, welche den Messfehler möglichst gering halten (z. B. größere Gegenstände vermessen oder den Gegenstand mehrfach mit Schnur umwickeln).

Hintergründe

Das Zentrale dieser Einführung ist, dass die Schüler hier selbst die Zahl π anhand beliebiger kreisförmiger Gegenstände bestimmen. Durch die freie Wahl der Gegenstände wird verdeutlicht, dass π nicht von der Größe des Kreises abhängt.

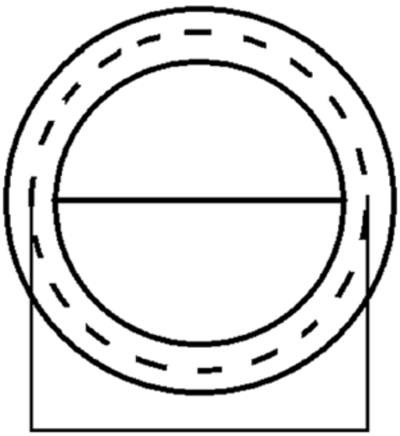
Obwohl das Verhältnis konstruktiv bestimmt worden ist, kennt niemand den exakten Wert.

Durch den Ansporn, genau zu messen, werden die Schüler zu sorgfältigem und geplantem Arbeiten bewegt. Dies führt zu einer ersten Auseinandersetzung mit Messfehlern und deren Bedeutung. Diese Überlegungen sind fachübergreifend wertvoll, wie z. B. in den Fächern Physik und Chemie.

Messfehler

Um eine möglichst exakte Näherung von π zu bekommen, muss man versuchen die Messfehler möglichst gering zu halten. Dazu gibt es einige einfache Dinge zu berücksichtigen:

Zuerst gilt, dass eine dicke Schnur zu einem ungenauen Ergebnis führt, da die Seite der Schnur, die direkt am Gegenstand anliegt den Umfang korrekt angibt. Legt man die Schnur aber gerade hin und misst mit dem Metermaß die entsprechende Länge, so misst man den Umfang des Kreises mit dem Durchmesser $d' = d + d_{Schnur}$. Aus dieser Gleichung folgt sofort, dass mit dünneren Schnüren das Ergebnis besser wird.



Man kann den Messfehler gering halten, indem man große Gegenstände vermisst. Dies verringert nicht nur den relativen Fehler, sondern auch den systematischen Fehler (oben beschrieben). In der obigen Formel sieht man dies, da $d + d_{Schnur} \approx d$ falls d genügend groß ist.

Eine andere Methode den relativen Fehler zu verringern, ist den Gegenstand mehrfach zu umwickeln und die Länge der gebrauchten Schnur am Ende durch die Anzahl der Umwicklungen zu teilen.

5.2 Vom Umfang zum Flächeninhalt eines Kreises

Claudia Roosen

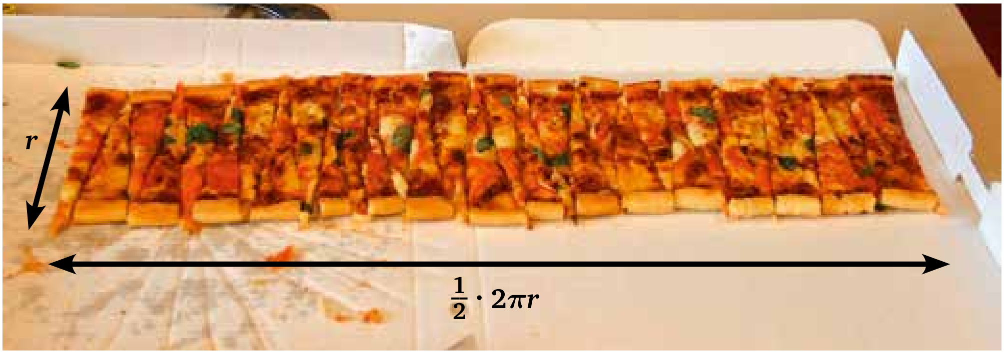
Die Schüler erfahren anhand einer Pizza, wie sich die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises aus seinem Umfang herleiten lässt.

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer bestellt vor der Unterrichtsstunde eine Pizza bei einem Lieferdienst, der diese zu einem bestimmten Zeitpunkt in das Klassenzimmer bringt. Nachdem die Schüler gefragt wurden, wer am Schluss ein Stück von der Pizza haben möchte, zerteilt der Lehrer die Pizza in entsprechend viele, gleich große Kreisausschnitte. Diese legt er unter Mithilfe der Schüler so nebeneinander, dass sich eine zur Pizzakreisscheibe flächengleiche Figur ergibt, die einem Rechteck ähnelt. Durch diese Anordnung erkennen die Schüler, dass die Breite des Rechtecks ungefähr dem Radius des Kreises entspricht, sowie die Länge dem halben Kreisumfang.

Für den Flächeninhalt des Kreises ergibt sich somit die Formel:

$$A = Länge \cdot Breite = \pi r \cdot r = \pi r^2$$



Hintergründe

Pizzalieferung in den Mathematikunterricht

Die Grundidee dieser Herleitung zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises ist allgemein bekannt. Der didaktische und pädagogische Vorteil dieser Vorgehensweise gegenüber einem gewöhnlichen Tafelbild besteht darin, dass sich das einmalige Erlebnis, dass der Lieferdienst die Pizza bis in das Klassenzimmer bringt, tief einprägt. Der Pizzaservice im Klassenzimmer ist höchst ungewöhnlich. Und wenn die Schüler zu Hause am Esstisch, wo eigentlich die Pizza hingehört, davon erzählen, berichten sie gleichzeitig vom Mathematikunterricht. So wird der ein oder andere Elternteil die Frage stellen: „Warum esst ihr Pizza im Matheunterricht?“

Grenzwertprozess

Da die nebeneinander gelegten Pizzastücke nicht direkt ein Rechteck ergeben, wird von den Schülern ein Vorstellungsvermögen gefordert. Wenn die Schüler verstanden haben, dass sich die aus den Pizzastücken zusammengelegte Figur durch Erhöhung der Anzahl der Kreisausschnitte immer mehr einem Rechteck annähert, können sie die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises herleiten und haben dabei einen Grenzwertprozess nachvollzogen.

5.3 Berechnung des Kreisbogens und des Flächeninhalts eines Kreisstücks

Simon Steiert

Ziel ist die Einführung der Berechnung des Kreisbogens und des Flächeninhalts eines Kreisstücks. Voraussetzung für diese Aufgabe ist die Kenntnis über die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts eines Kreises mit bekanntem Radius.

Konkrete Umsetzung

Der Lehrer fragt die Schüler, wer ein Stück Pizza haben möchte. Anschließend zerschneidet er die Pizza in genauso viele Stücke, wie sich Schüler gemeldet haben. Danach stellt er den Schülern die Frage nach der Größe des Flächeninhalts und der Länge des Kreisbogens eines Pizzastückes. Sie überlegen selbst, welche Daten zur Berechnung der geforderten Größen von Nöten sind. Nach der Berechnung wird gegessen.

Hintergründe

Haptische Herleitung

Durch die Zerteilung der Pizza in gleich große Stücke soll dem Schüler klar gemacht werden, dass er einen gewissen Anteil vom Ganzen bekommen wird. Mit den Kenntnissen aus dem Bereich der Bruchrechnung wird der Schüler verstehen, dass man den Umfang und Flächeninhalt der ganzen Pizza durch die Anzahl der Pizzastücke teilen muss, um auf den korrekten Wert des Flächeninhalts und der Länge des Kreisbogens eines Pizzastückes zu kommen.

Visuelle und haptische Erfahrung von Größenverhältnissen

Durch die Berechnung des Kreisbogens und Flächeninhalts eines konkreten Objektes, das sowohl haptisch, als auch visuell vorliegt, bekommen die Schüler einen Eindruck von den Größenverhältnissen im Kreis. Sie erfahren, wie viel Quadratzentimeter Pizza sie zu sich nehmen. Somit bekommt der berechnete Wert des Flächeninhalts des Pizzastückes eine konkrete mengenhafte Bedeutung.

5.4 Oberfläche eines Kegels

Kristina Weber und Yannick Sulz

Hinter einer scheinbar einfachen Aufgabenstellung verbirgt sich eine mögliche Hinführung zur Oberfläche eines Kegels.

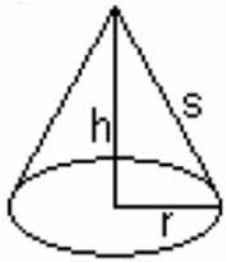
Konkrete Umsetzung

Aufgabenstellung

Für diese Übung finden sich die Schüler in ihren Farbgruppen zusammen. Nun stellt der Lehrer den Gruppen den Auftrag, aus einem DIN-A4 Blatt einen Kegel zu bauen. Hierfür gibt er den Radius der Kegelgrundfläche mit $r = 6cm$ und die Höhe des Kegels mit $h = 7cm$ vor. Außerdem wird ein Zeitfenster von ca. 20 Minuten angegeben. Hilfsmittel sind Klebestifte, Scheren und Zirkel.

Erweiterter Arbeitsauftrag

Jede Farbgruppe schreibt anschließend auf ihren Kegel die von ihr errechnete Oberflächengröße des Kegels.

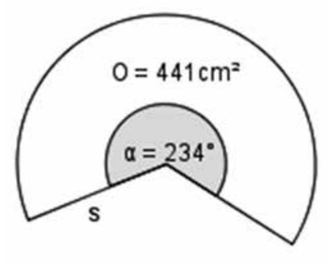


Lösungsvorschlag

Für die Mantellinie s gilt:

$$s^2 = h^2 + r^2 = 7^2 + 6^2 \Rightarrow s \approx 9{,}21$$

Der Kreis mit dem Radius s kann jetzt mit Hilfe des Zirkels gezeichnet werden. Um den Kegelmantel anzufertigen, benötigt man offensichtlich die Bogenlänge b des Kreisausschnittes.



$$b = \frac{a}{360°} \cdot 2\pi s \Rightarrow a = \frac{360° \cdot b}{2\pi s}$$

Da b auch der Umfang des Kreises ist, gilt: $b = 2\pi r$
Eingesetzt ergibt sich:

$$a = \frac{360° \cdot 2\pi r}{2\pi s} = \frac{360° \cdot r}{s} \approx 234{,}2°$$

Alle nötigen Größen für den Bau des Kegelmantels sind jetzt bekannt. Für die erweiterte Aufgabenstellung muss $O = M + G$ berechnet werden.

Da aus $a = \frac{360° \cdot r}{s}$ folgt: $\frac{a}{360°} = \frac{r}{s}$ gilt:

$$O = \frac{a}{360°} \cdot s^2 \cdot \pi + r^2 \cdot \pi = \frac{r}{s} \cdot s^2 \cdot \pi + r^2\pi = r \cdot s \cdot \pi + r^2\pi = \pi r(s + r)$$

(Für den Mantel gilt: $M = \pi rs$)
Für $r = 6\,cm$ und $h = 7\,cm$ ergibt sich somit eine Oberfläche $O = 441\,cm^2$.

Hintergründe

Der Lehrer hat den Schülern eine scheinbar einfache Aufgabe gestellt: Es soll ein Kegel gebastelt werden. Im Laufe der Bastelphase stoßen die Schüler auf einige Hürden. Die erste Hürde wird darin bestehen, zu bestimmen wie groß der Zirkel eingestellt werden muss. Diese Länge s wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt. Des Weiteren muss der Winkel berechnet werden, mit welchem geschnitten wird. Durch das Lösen eines einfachen Problems werden die Schüler mit erhöhtem Ehrgeiz und Motivation versuchen, weitere anfallende Probleme zu bearbeiten. Der leichte Einstieg fördert die Motivation der Schüler, auch an weiterführende Überlegungen heran zu gehen. Bei dieser Übung steht eine konkrete Aufgabe im Vordergrund, anhand dessen die Schüler später die allgemeine Herleitung erarbeiten. Für die Schüler ist es somit leichter, Bereitschaft für den nachfolgenden Beweis zu zeigen und ihm zu folgen. Die gebauten Kegel werden zur allgemeinen Betrachtung gesammelt, wodurch der Ehrgeiz erhöht wird, möglichst gute Resultate abzuliefern. Beim gemeinsamen Vergleichen der errechneten Oberflächen kann das Thema Rundungen angeschnitten werden.

6 Geometrie des Raumes

6.1 Erste Begegnung mit den Arbeitsmaterialien

Nicolas Müller, Julia Lösle und Alexander Mersch

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie Arbeitsmaterialien eingeführt werden können. Die Idee der folgenden Übung ist, dass dem Material selbst Aufmerksamkeit geschenkt wird und so die Achtung und die Wertschätzung ihm gegenüber steigen.

Konkrete Umsetzung

Alle Gegenstände werden vom Tisch entfernt. Danach teilt der Lehrer den Schülern mit, dass sie gleich Gegenstände erhalten werden. Die Schüler legen ihre Hände in Form einer Schale vor sich auf den Tisch und schließen ihre Augen. Daraufhin geht der Lehrer durch die Reihen und teilt ihnen die Gegenstände aus. Diese werden mit geschlossenen Augen ertastet. Erst wenn sie zu wissen glauben, um was es sich handelt, öffnen sie die Augen. Außerdem sollen sie sich Gedanken darüber machen, wozu man diese Gegenstände gebrauchen könnte.

Hintergründe

Im Zentrum dieser Übung stehen das Arbeitsmaterial und die Wertschätzung, die der Schüler dem Material entgegenbringt. Erhalten sie es wie üblich vom Lehrer, genügt ein Blick und das Arbeitsmaterial wird erkannt, kategorisiert und ist nichts Besonderes mehr. Wird das Material aber durch die oben dargestellte Methode eingeführt, stellen sich folgende Effekte ein:

Spannungs- und Erwartungshaltung

Für die Schüler stellt sich sofort die Frage: Was teilt uns der Lehrer aus? Und warum auf eine so ungewöhnliche Art? Dadurch erreicht der Lehrer, unabhängig von dem ausgeteilten, ein gewisses „Startkapital“ an Schülerinteresse. Die Schüler werden sich mindestens so lange mit dem Material beschäftigen, bis sie zu wissen glauben, was sie in den Händen halten.

Zusammenhang zwischen den Gegenständen

Hat der Schüler mehrere Gegenstände in der Hand, macht er sich zahlreiche Gedanken über dessen Zusammenhang. Im Beispiel der Erbse und dem Zahnstocher wird der Zahnstocher oft automatisch in die Erbse gestochen. Der Schüler fragt sich häufig auch, was diese Gegenstände mit dem Unterricht zu tun haben. So ist der Schüler nicht nur in der Position, die Frage nach dem „Was“ zu ergründen, sondern nach dem „Warum“. Nicht nur das Material selbst, sondern auch das Beziehungsgeflecht, in dem es mit sich selbst, und mit dem (vorangegangenen) Unterricht steht, wird reflektiert.

Macht des Materials

Das Material hat darüber hinaus das Potenzial, die Aufmerksamkeit der Schüler voll zu binden – sowohl im positiven, als auch im negativen Sinne:
Ist das Material erst einmal ausgeteilt, so wird es sehr schwierig für den Lehrer die Aufmerksamkeit der Schüler zu erhalten. Im Beispiel mit den Erbsen und den Zahnstochern fangen die Schüler sofort an damit zu spielen; er hat mit dem Material so-

mit die Leitung aus den Händen gegeben. Arbeitsanweisungen sollten also vor dem Austeilen des Materials gegeben werden.
Im positiven Sinne hat das Material die Macht, den Unterricht „wie von selbst“ zu halten: Ist das Material verteilt, übernimmt es den Unterricht, und der Lehrer hat Zeit, einzelne Schüler intensiv zu betreuen.

Erweiterung

Eine weitere Möglichkeit, dem Material mehr Wert zu geben, ist, dass der Lehrer die Schüler darum bittet, das Arbeitsmaterial selbst mitzubringen. Kümmert sich jeder Schüler selbst um seine Materialien und bringt diese in den Unterricht mit, so geht er gewissenhafter mit den Gegenständen um. Dies liegt daran, dass er sich die Arbeit gemacht hat die Materialien herauszusuchen und mitzubringen. Außerdem möchte der Schüler sein Eigentum nicht beschädigen.

6.2 Bau eines platonischen Körpers: das Ikosaeder

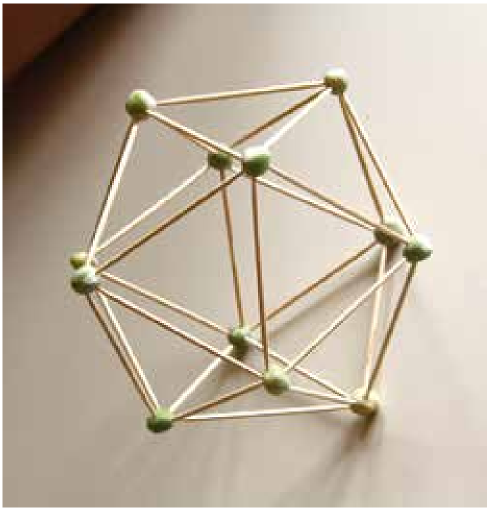
Katrin Waniek, Britta Springkart und Marion Kessler

Die Schüler bauen eigenständig ein Ikosaeder aus Erbsen und Zahnstochern.

Konkrete Umsetzung

Vorbereitung

Für das Projekt werden grüne Trockenerbsen und Zahnstocher benötigt. Die Erbsen werden über Nacht in Wasser eingeweicht, um eine gute Beschaffenheit zu erhalten.



Platonische Körper

Mit der Frage: „Was ist der einfachste Körper, den man mit Hilfe von Erbsen und Zahnstochern bauen kann?“ (Tetraeder), kommt die Klasse auf das Thema der Platonischen Körper zu sprechen. Platonische Körper sind regelmäßige Polyeder, deren Oberflächen aus regelmäßigen Vielecken bestehen. Um den Schülern ein besseres Verständnis für diese geometrischen Körper zu geben, kann die Lehrperson ein einfaches und verständliches Beispiel beschreiben: eine auf einem platonischen Körper krabbelnde Ameise kann nicht entscheiden, an welcher Ecke (Erbse) sie sich befindet, da von jeder Ecke die gleiche Anzahl an Zahnstochern abgehen. Platonische Körper sind also vollkommen symmetrische Objekte, bei denen sowohl Ecken, Kanten als auch Flächen gleichmäßig sind. Die Lehrperson kann nun die fünf Typen Platonischer Körper angeben: das Tetraeder (4 Flächen), das Hexaeder (6 Flächen), das Oktaeder (8 Flächen), das Dodekaeder (12 Flächen) und zum Schluss das Ikosaeder (20 Flächen).

Aufgabenstellung

Der Lehrer stellt den Schülern das Material vor und teilt die Klasse in ihre gewöhnlichen Farbgruppen ein. Für diese Übung bietet sich außerdem eine Gruppeneinteilung in Zeitmanager, Gesprächsleitung, Protokollant und Materialwart an. Nun erteilt der Lehrer den Schülern den Auftrag, ein Ikosaeder zu bauen. Dabei macht er sie darauf aufmerksam, dass die Symmetrie die Bauanleitung für ihr Projekt ist. Je nachdem, wie stark die Klasse ist, kann der Lehrer die Aufgabenstellung noch weiter präzisieren. Die Lehrperson gibt den Zeitrahmen für die bevorstehende Konstruktion vor (ca. 20 Minuten) und macht den Zeitmanager nochmals auf seine Verantwortung aufmerksam. Anschließend besorgt der Materialwart die Erbsen und Zahnstocher für die gesamte Farbgruppe. Nun kann sich jeder Schüler dem Projekt widmen und sein eigenes Ikosaeder bauen. Wichtig ist, dass der Lehrer alle Aufgaben und Anweisungen gibt, bevor die Schüler sich das Material besorgen. Haben die Schüler das Material einmal in den Händen, zieht es die komplette Aufmerksamkeit auf sich.

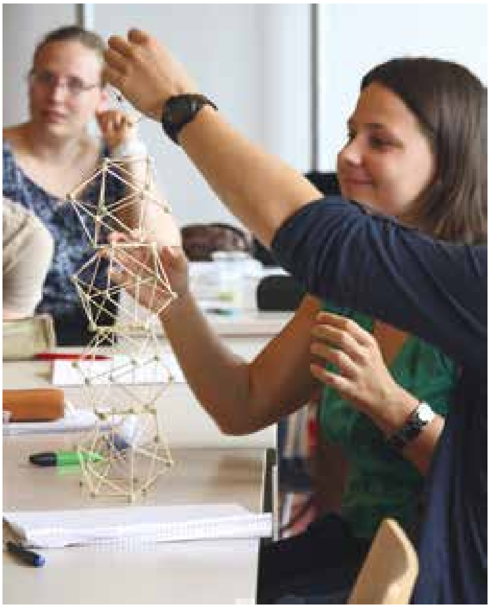
Hintergründe

Bauprozess

Während des Bauprozesses übernimmt das Material den Unterricht. Da die Schüler in ihre Arbeit vertieft sind, könnte die Lehrperson gegebenenfalls sogar selbst ein Ikosaeder bauen oder hat Zeit für einzelne Schüler.

Umdeutung des Spiels als Forschung

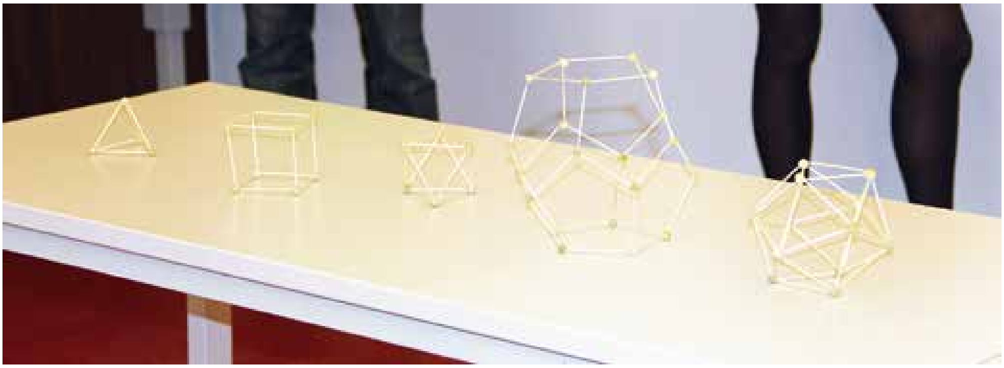
Auf natürliche Weise fangen die Schüler an mit dem Material zu spielen. Dieses Spiel muss nicht durch die Autorität des Lehrers verboten werden. Mitunter bietet es sich an, dass diese Aktivitäten von der Lehrperson sogar gefördert werden können. Baut ein Schüler beispielsweise einen Turm aus Ikosaeder, bietet sich die Frage danach an, ob man mit Ikosaeder parkettieren könnte.

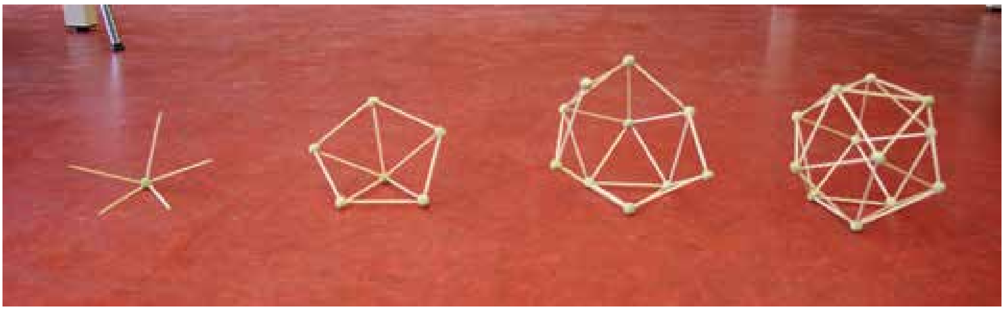


Natürlich braucht jeder Schüler unterschiedlich lange, um seinen Körper zu bauen. Damit sich schneller arbeitende Schüler nicht anderweitig beschäftigen, können ihnen weiterführende Aufträge gestellt werden, zum Beispiel die Konstruktion weiterer Platonischer Körper. Die Schüler werden schnell merken, dass nicht jeder Platonische Körper so stabil ist wie das Ikosaeder.

Dreidimensionale Bauanleitung

Wenn gewünscht, kann die Lehrperson Musterobjekte auf einem separaten Tisch im Klassenraum ausstellen. Diese verdeutlichen jeden einzelnen Arbeitsschritt (Wie viele Zahnstocher stecken in einer Erbse? Wie stecke ich alles zusammen?). Somit ist den Schülern mit nur wenigen Mitteln beim Bau des Objekts geholfen.





Duale Körper

Platonische Körper sind dual, weil man einen platonischen Körper innerhalb eines anderen findet. Der duale Polyeder bildet sich durch die Mittelpunkte der Flächen vom Ausgangskörper und die Verbindungen dieser Linien bilden dadurch den dualen platonischen Körper. Durch diese Eigenschaft hat der duale Polyeder genauso viele Eckpunkte, wie der umgebende Polyeder Flächen besitzt.

Erweiterung

Vor allem in der Weihnachtszeit bietet sich die Möglichkeit an, das Ikosaeder zu einem 20-zackigen-Weihnachtsstern zu erweitern, indem man Tetraeder auf dem Körper anbringt. Dies ist möglich, weil die Flächen des Tetraeders ebenfalls dreieckig sind. Zudem ist dies eine schöne Art von Weihnachtsschmuck, der den Schülern zeigt, dass Mathematik auch in ihrem Wohnzimmer einen Platz finden kann.

6.3 Eine kindgerechte Erklärung von Minimalflächen

Nico Huber

Die folgende Übung stellt eine weitere Möglichkeit dar, mit Erbsen und Zahnstochern zu arbeiten. Sie liefert ein anschauliches Beispiel für extreme Größen außerhalb der klassischen Kurvendiskussion.

Konkrete Umsetzung

Die Klasse versammelt sich in der Mitte des Klassenzimmers um einen Tisch, auf dem nur das im Folgenden benötigte Material steht. Der Lehrer mischt vor den Augen der Schüler Seifenblasenwasser an. (Verhältnis: 5 l Wasser, 200 ml Spülmittel und 50 ml Glycerin).

Das Glycerin kann wie im Kapitel zur Einführung von Material beschrieben vorgestellt werden.

Nun erklärt der Lehrer die besondere Eigenschaft von Seifenhäuten: man kann sich diese wie ein Lebewesen vorstellen, welches so lange wie möglich leben möchte. Aufgrund der Schwerkraft fließt die Hautflüssigkeit von oben nach unten, wodurch sich oben die Seifenhaut nach und nach auflöst und schließlich die gan-

ze Seifenhaut platzt. Die Seifenhaut lebt also am Längsten, wenn ihre Haut die größtmögliche Dicke besitzt. Das bedeutet, dass die Seifenhaut immer die kleinstmögliche Fläche einnimmt, da so ihre Hautdicke am größten ist und sie somit am längsten lebt.

Der Lehrer fragt, welche Struktur die Seifenhaut bildet, wenn man ein Tetraeder in das Seifenblasenwasser eintaucht und lässt die Schüler etwas überlegen, auch wenn tatsächlich keiner darauf kommen kann.

Im Anschluss wird das „Experiment" durchgeführt und das unerwartete Ergebnis präsentiert. Um zu zeigen, dass die Seifenhaut gleich nach dem Auftauchen die Minimalfläche angenommen hat, wird der Tetraeder etwas „geruckelt" und dann gezeigt, dass die Seifenhaut, nachdem sie aufgehört hat zu vibrieren, die gleiche Struktur einnimmt wie am Anfang.

Erweiterung

Die Übung kann nun mit anderen Körpern weitergeführt bzw. dem Interesse der Klasse entsprechend ergänzt werden.

Kinder können eigenständig beliebige Körper bauen und eintauchen. Es gilt: Je einfacher die Körper, desto anschaulicher wird das Ergebnis.

Hintergründe

Realer Bezug

Die Schüler erleben hier das mathematische Gebiet der Minimalflächen in der „realen" Welt. Mit der Aufforderung, sich zu überlegen, welche Fläche die Seifenhaut bildet, werden alle in den Prozess einbezogen und zur aktiven Teilnahme ermutigt. Dies kann dadurch weiter unterstützt werden, dass die Körper im Vorfeld selbst von den Schülern angefertigt werden und die Übung somit einen persönlichen Bezug erhält.

Ästhetik und Mathematik

Mit der einfachen und schönen Darstellung der Thematik erhält alles eine besondere Ästhetik, wodurch bei den Schülern Interesse aufgebaut wird, welchem sie auch leicht selbst zuhause weiter nachgehen können.

Insgesamt wird bei dieser Übung, wie immer, wenn Material zum Einsatz kommt, Mathematik haptisch erfahrbar.

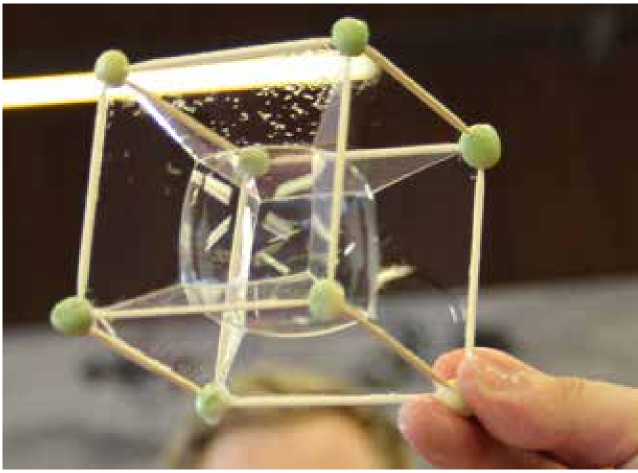
6.4 4-dimensionaler Würfel

David Ruf

Konkrete Umsetzung

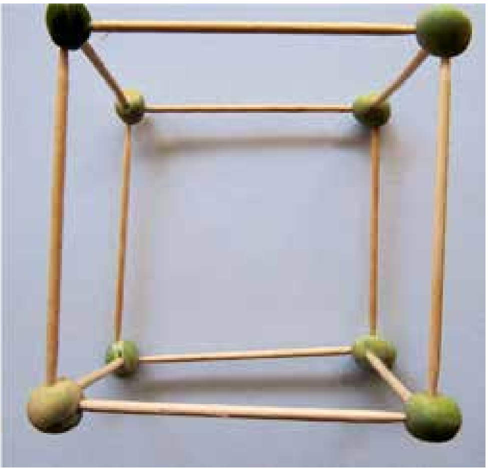
Wie in der vorangegangen Übung taucht der Lehrer nun einen Würfel in das Seifenblasenwasser und zeigt die entstandenen Minimalflächen. Durch erneutes Eintauchen einer Seite des Würfels wird Luft eingeschlossen und es bildet sich ein kleinerer, aufgeblähter Würfel, der im Zentrum des großen Würfels steht.

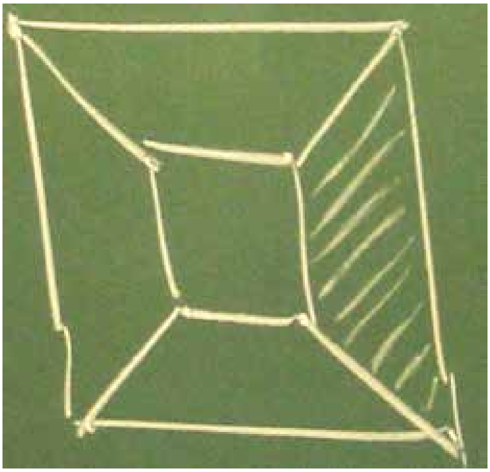
Das Ergebnis lässt sich als Zentralprojektion des 4-dimensionalen Würfels im 3-dimensionalen Raum interpretieren.



Hintergründe

Die folgende Zentralprojektion bietet eine analoge Betrachtung des 4-dimensionalen Würfels.





Die schraffierte Fläche ist eines der sechs Quadrate des Würfels, jedoch durch die Einschränkung der Ebene nach hinten verzerrt. Das kleine Quadrat in der Mitte ist die untere Seite des Würfels.

So besteht also der 4-dimensionale Würfel aus insgesamt 8 Würfeln, welche sich aus den 6 Pyramidenstümpfen, dem großen Würfel und dem Kleinen in der Mitte zusammensetzen, was man anhand seiner Zentralprojektion nachzählen kann.

Auf diese Art kommt man auf 16 Ecken, 32 Kanten und 24 Flächen.[14]

14 vgl. Kramer, Martin (2013): Mathematik als Abenteuer Band 1: Geometrie und Rechnen mit Größen. Hallbergmoos: Aulis. S.175 f.

7 Projektion

7.1 Drei-Phasen-Projektion

Johannes Huber und Jeremias Moser-Fendel

Die Schüler lernen, dass es mindestens drei unterschiedliche Ansichten – Vorderansicht, Seitenansicht und Draufsicht - benötigt um einen Gegenstand exakt zu bestimmen. Außerdem wird deutlich, dass eine Drehung des Gegenstands um 180° in der Projektion keine zusätzliche Information liefert. Nur die Drehung um 90° in unterschiedlicher Richtung bewirkt einen Informationsgewinn.

Konkrete Umsetzung

Alle Tische werden zur Seite geräumt. Der Raum wird so umgestaltet, dass eine Bühne und Zuschauerplätze entstehen - abgetrennt durch ein Leintuch. Zwei Freiwillige spannen mit wenigen Metern Abstand zur Tribüne ein Leintuch auf.

Der Tageslichtprojektor steht möglichst weit weg von der Leinwand, so dass sich auf dem Leintuch eine Parallelprojektion ergibt. Wenn alles vorbereitet ist, schließen die Schüler die Augen. Der Lehrer stellt sich hinter das Leintuch und hält einen Gegenstand in das Licht des Projektors. Die Schüler öffnen die Augen und versuchen anhand des projizierten Schattens zu erraten, um was für einen Gegenstand es sich handelt. Die Schüler schließen erneut die Augen, während der Lehrer den Gegenstand um



90° dreht. Anschließend öffnen die Schüler die Augen und versuchen erneut den Gegenstand zu erraten.

Tipps zur Umsetzung

Der Lehrer sollte darauf achten, dass der Gegenstand mindestens dreimal gedreht wurde, bevor er eindeutig zu erkennen ist (Vorder-, Seitenansicht und Draufsicht). Auch wenn ein Schüler (zufällig) bereits im ersten Anlauf den Gegenstand errät, wird der Lehrer die Lösung nicht vorzeitig preisgeben. Der Gegenstand kann häufig erst nach der dritten Drehung eindeutig bestimmt werden.

Die Schüler haben jetzt die Gelegenheit, selbst hinter das Leintuch zu treten und die Übung mit eigenen Gegenständen durchzuführen.

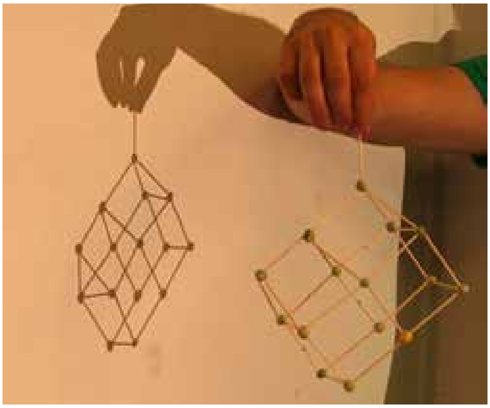
Hintergründe

Dies ist eine erste Begegnung mit Projektion. Projektion spielt eine große Bedeutung in der Vektorrechnung und der Trigonometrie.

7.2 Drehbewegung einer Projektion

Johannes Huber und Jeremias Moser-Fendel

Konkrete Umsetzung



Ein Tageslichtprojektor wird auf eine Wand gerichtet. Die Schüler stellen sich rechts und links des Lichtkegels auf, so dass sie möglichst gut auf den Schatten des Gegenstandes blicken können. Der Lehrer hält einen aus Zahnstocher und Erbsen konstruierten Gegenstand mit möglichst geringem Abstand zur Wand in das Licht des Projektors und dreht diesen. Um den Gegenstand drehen zu können, muss an einer Ecke ein zusätzlicher Zahnstocher als Halterung angebracht werden (siehe Abbildung). Jetzt sollen die Schüler anhand der Bewegung des Schattens überlegen, ob dieser sich in dieselbe Richtung wie das Original dreht oder in die entgegengesetzte. Indem die Schüler den Daumen nach oben oder unten halten und mit den anderen Fingern die Drehrichtung mitteilen, geben sie an, welche Richtung sie vermuten.

Hintergründe

Informationsverlust durch Projektion

Durch Projektion geht die dritte Dimension (vgl. Drei-Phasen-Projektion) und die Drehrichtung als Information verloren. Im Schatten lassen sich keine Verdeckungen erkennen, d.h. beim Schatten des Gegenstandes ist nicht mehr zu erkennen, welche projizierte Ecke der vorderen des Originals entspricht. Je nachdem, welche Ecke der Betrachter als „vordere“ wahrnimmt, dreht sich der Schatten in die entsprechende Richtung. Es lässt sich bei der Projektion also keine Aussage mehr über die Ausrichtung des Gegenstandes treffen.

Mathematik als Streitschlichter

Mathematik nimmt in dieser Übung auch die Rolle des Pädagogen im Sinne eines Streitschlichters ein, denn trotz unterschiedlich wahrgenommener Drehrichtungen liegt keiner der Schüler richtig oder falsch. Zwei Menschen nehmen Wirklichkeiten unterschiedlich wahr, trotzdem können beide Recht haben. Die Schüler können darauf aufmerksam gemacht werden und verstehen, dass die eigene Wirklichkeit nur eine mögliche Interpretation der Wahrheit ist.

Bedeutung von Projektion in der Mathematik

Die Thematik spielt bei der Einführung von Sinus und Cosinus als Projektion einer Drehbewegung eine Rolle. Auch in der Vektorrechnung findet sich der Projektionsgedanke wieder. Das Rechnen mit Vektoren wird erst durch deren Projektion auf Koordinaten möglich.

Wahrscheinlichkeit und Zufall

8 Geheime Botschaften

8.1 Vorteile der Verschlüsselung als Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frieder Roggenstein

In den folgenden Kapiteln wird eine Möglichkeit aufgezeigt das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen.

Zuerst erleben die Schüler auf spielerische Art und Weise das Prinzip des Verbergens. Daraufhin lernen sie unterschiedliche Verfahren zur Verschlüsselung von Texten kennen. Anhand der Entschlüsselung durch eine Wahrscheinlichkeitsanalyse wird der Bogen zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung gespannt.

Hintergründe

Alltagsnähe

Die Verschlüsselung als Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung ist für die Schüler sehr ansprechend, da sie aus ihrem eigenen Leben gegriffen ist. Die meisten Schüler haben schon einmal Nachrichten verschickt, die nicht für jedermanns Augen bestimmt waren. Außerdem werden sie vor allem durch das Internet ständig mit verschlüsselten Inhalten konfrontiert. Die Motivation ist daher besonders hoch und die Schüler nutzen das Erlernte vielleicht sogar außerhalb des Mathematikunterrichts.

Problemorientierter Ansatz

Außerdem weckt der problemorientierte Ansatz, einen Text selbst ent-/verschlüsseln zu müssen, den Ehrgeiz vieler Schüler. Dieser Effekt wird bei einem typischen Einstieg mit einem Glücksspiel, wie zum Beispiel Würfeln oder Lotto, nicht so stark erzielt.

Spielerisches Lernen

Aufgrund des spielerischen Charakters des Unterrichts bemerken die Schüler gar nicht, dass sie sich mit Mathematik beschäftigen. Das selbstständige Ausprobieren und Knobeln ermöglicht ein besseres Verständnis des Erlernten.

Kulturelle Bildung

Die Kodierung von Daten ist ein fester Bestandteil unseres Alltags. Schon damals im alten Rom wurde das Prinzip des Verschlüsselns zur Überbringung von geheimen Nachrichten genutzt. Auch im zweiten Weltkrieg spielte die Kodierung mit der bekannten Rotor-Schlüsselmaschine Enigma eine große Rolle. Das Thema bietet sich daher auch für fächerübergreifenden Unterricht an. Die Verschlüsselung wird heute nicht mehr nur von Geheimdiensten und dem Militär angewandt, sondern ist aus dem Zeitalter des Internets nicht mehr wegzudenken. Ein weiterer Grund dafür, dass den Schülern dieses Thema nahegebracht werden sollte.

8.2 Zollspiel

Frieder Roggenstein

Dies ist eine Hinführung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es gibt zwei Möglichkeiten Nachrichten geheim zu halten: Das Verbergen und das Verschlüsseln. Das folgende Spiel thematisiert das Verbergen.

Konkrete Umsetzung

Es werden vier Schüler ausgewählt, die in die Rolle von Schmugglern schlüpfen und acht weitere Schüler, deren Aufgabe es ist, als Zollbeamte das Schmuggeln zu verhindern.

Die vier Schmuggler bekommen einen kleinen Gegenstand – zum Beispiel eine SD-Speicherkarte – und gehen damit vor die Türe. Ihre Aufgabe ist es, diesen so zu verstecken, dass sie damit an allen Zollbeamten vorbeikommen und die andere Seite des Klassenzimmers erreichen. Wer von ihnen der eigentliche Schmuggler ist und wo er oder sie den Gegenstand versteckt hat, bleibt den Zuschauern und den Zollbeamten verborgen.

Die Zollbeamten stellen sich immer zu zweit gegenüber in einer Reihe auf und dürfen die Schmuggler durchsuchen, wobei natürlich auf deren Intimsphäre Rücksicht genommen werden muss. Jeder Schmuggler muss alle vier Stationen durchlaufen haben, bevor er die andere Seite des Klassenzimmers erreicht. Pro Station haben die Zollbeamten 20 Sekunden Zeit.

Wenn ein Schmuggler auffliegt und der Gegenstand gefunden wird, wird das Spiel abgebrochen.

Erweiterung

Wird der versteckte Gegenstand bis zum Schluss nicht gefunden, kann man das Spiel erweitern, indem man die Verdächtigen in einem Verhör befragt. Vor der Auflösung darf jeder Schüler der Klasse einen Tipp abgeben, wer der Schmuggler ist.

Hintergründe

Spannungs- und Erwartungshaltung

Die Schüler erleben das Prinzip des Verbergens auf eine spielerische Weise. Gleichzeitig ist die Übung sehr alltagsnah, da viele Schüler bereits am Flughafen oder im Fußballstadion eine solche Durchsuchung erlebt haben. Auch das Lesen der Gesichter und das eigene Mitraten, wer denn wohl der Schmuggler sein könnte, sorgen für Spannung und Interesse.

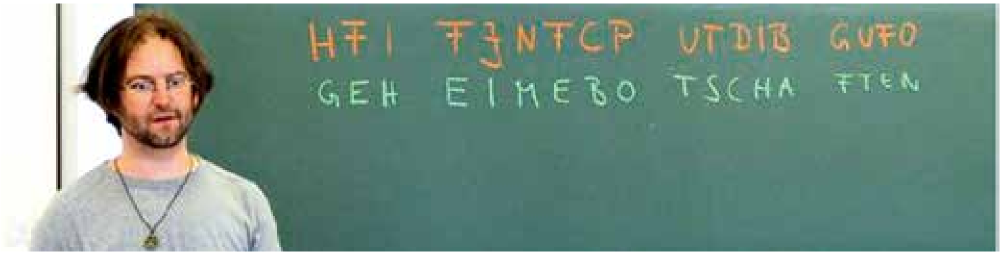
Gemeinsame Grundlage von Verbergen und Verschlüsseln

Durch die Veranschaulichung des Verbergens wird den Schülern der Sinn des späteren Themas Verschlüsselung bewusst: In beiden Fällen geht es um die Weitergabe eines Geheimnisses, ohne dass es bekannt wird. Die Verschlüsselung geht einen Schritt weiter und schützt auch vor dem Fall, dass die Nachricht in die falschen Hände gerät.

8.3 Die Caesar-Verschlüsselung

Janik Isele

Mithilfe der einfach zu durchschauenden Caesar-Verschlüsselung werden die Prinzipien der Ver- und Entschlüsselung aufgezeigt.



Konkrete Umsetzung

Die Lehrkraft notiert eine kurze verschlüsselte Botschaft mit roter Kreide an die Tafel. Die Aufforderung an die Klasse lautet nun schlicht:

„Wer herausfindet, was die Botschaft bedeutet, sagt ‚Eins!'. Die zweite Person, die das Rätsel löst, sagt ‚Zwei!' und so weiter. Mal sehen, wie lange es dauert, bis ihr bei 30[15] angekommen seid."

Der Prozess kann entweder strikt fortgeführt werden, bis die genannte Zahl erreicht wird, oder aber früher beschleunigt werden. Hierzu werden diejenigen Schüler, die die Lösung bereits kennen, aufgefordert, den ersten Buchstaben zu nennen. Dieser wird mit grüner Kreide (Klartext) unter den ersten roten Buchstaben (verschlüsselter Text) notiert. Für den Fall, dass der erste alleine nicht weiterhilft, wird auch der zweite Buchstabe aufgelöst. Aufgrund der Einfachheit der Chiffrierung sollte nun auch beim Rest der Klasse der „Aha!-Effekt" einsetzen. Erkennt kein einziger Schüler die Verschlüsselung, so wird der erste Lösungsbuchstabe durch den Lehrer eingesetzt. Zum Ende der Übung steht die vollständig entschlüsselte Botschaft in grüner Farbe so unter der geheimen Nachricht, dass jeweils ein grüner und ein roter Buchstabe einander zugeordnet werden können. Einer der Schüler erläutert abschließend die Funktionsweise der Caesar-Chiffre. Das folgende Tafelbild dient dabei der Unterstützung.

15 Diese Zahl ist (im Rahmen der Klassenstärke) prinzipiell frei wählbar, sollte aber groß genug sein, um herausfordernd zu wirken.

Auflösung

Die Caesar-Verschlüsselung basiert auf einer Verschiebung des Alphabets. Hierzu wird dieses zunächst in grüner Schrift vollständig in einer Zeile notiert. Anschließend wird mit roter Kreide ein zweites Alphabet darunter geschrieben, nun allerdings zyklisch nach rechts verschoben. In unserem einfachen Beispiel besteht die Verschiebung aus nur einem Schritt, d.h. das neue rote Alphabet beginnt mit dem Buchstaben B. Das A bildet entsprechend das letzte Glied und wird als 26. Buchstabe an das Z angehängt. Die so entstandenen Zeilen sind der Schlüssel, mit dem geheime Botschaften sowohl geschrieben, als auch entziffert werden können. Ersteres geschieht, indem die zu verschlüsselnden Worte (in grüner Farbe) aufgeschrieben werden und anschließend Schritt für Schritt jeder grüne Buchstabe durch den entsprechenden roten ausgetauscht wird. Falls die Art der Chiffrierung bekannt ist, funktioniert die Entschlüsselung dementsprechend in entgegengesetzter Richtung. Bewusst eingebaute Rechtschreibfehler oder falsch bzw. gar nicht gesetzte Leerzeichen erschweren die Entschlüsselung.

Ist die Anzahl der Verschiebungsschritte unbekannt, muss die sogenannte Wahrscheinlichkeitsanalyse angewandt werden.

Hintergründe

Verschlüsseln statt Verbergen

Die Caesar-Verschlüsselung, deren Titel auf ihre Verwendung durch den gleichnamigen Feldherrn zurückgeht, schließt an die Thematik des Zollspiels an. Ziel beider Übungen ist es, den Inhalt einer Botschaft geheim zu halten. Während das Verbergen der Nachricht im Zollspiel diese vor den Augen Dritter schützen soll, stellt die reine Sichtung für ein verschlüsseltes Schreiben kein Problem dar. Allerdings sollen Unbefugte in diesem weiteren Schritt der Absicherung nicht mehr in der Lage sein, den Inhalt des Textes zu verstehen. Beide Wege stellen Möglichkeiten der vertraulichen Kommunikation dar, bei welcher der direkte Kontakt von Angesicht zu Angesicht nicht möglich ist.

Rätselcharakter

Der herausfordernde Charakter der Übung spornt die Schüler an, da sie unter den Ersten sein wollen, die das Rätsel lösen. Ähnlich wie das „Versteckspiel“ der Schmuggler stammt auch dieses „Knobeln“ aus der Lebenswelt der Kinder, wodurch sie einen direkten Bezug zur Aufgabe besitzen.

Neben dem oben genannten Effekt herrscht weiter ein gewisser Gruppendruck, da niemand die Rolle des Unwissenden annehmen möchte. Dadurch wird ein lange anhaltendes, hohes Maß an Motivation sichergestellt, welches ausschließlich von der Art der Aufgabenstellung und nicht von externen Anreizen durch den Lehrer ausgeht.

Einfachheit

Dass diese Art der Caesar-Verschlüsselung vergleichsweise schnell zu durchschauen ist, hat gleich mehrere Vorteile: Zum einen wird dadurch der Einstieg in die Thematik der Chiffrierungen erleichtert und die oben genannte Motivation aufrechterhalten, da unlösbar erscheinende Rätsel zu schnell an Reiz verlieren. Des Weiteren werden die Schüler so von selbst auf eine Frage aufmerksam, die sich beim Umgang mit Verschlüsselungen zwangsläufig stellt: Wie lässt sich die Sicherheit der Chiffrierungen erhöhen? Damit wird nicht nur die Neugierde der Schüler geweckt, sondern auch die Überleitung zu ausgefalleneren Verschlüsselungen geschaffen.

8.4 Die Wahrscheinlichkeitsanalyse

Janik Isele

Die Wahrscheinlichkeitsanalyse ist ein Hilfsmittel zur Entschlüsselung komplexerer Kodierungen und Chiffren, beispielsweise der Caesar-Verschlüsselung mit mehreren Verschiebungsschritten.

Konkrete Umsetzung

```
DAMITK+I$DRITT+R
DI+BOT@CHAFT7+@+$
KA$$,WIRD@I+
V+R@T+CKTOD+R
V+R@CH7Ü@@+7T.
```

Die Schüler erhalten ein DinA4-Blatt, auf welchem ein teilweise verschlüsselter Text zu sehen ist. Dabei wurden einige Buchstaben durch Sonderzeichen ersetzt, während die restlichen unverschlüsselt blieben. Ziel ist es nun, den Text mithilfe der Wahrscheinlichkeitsanalyse zu entschlüsseln. Als Hilfsmittel steht den Schülern eine Häufigkeitstabelle zur Verfügung, welche das prozentuale Vorkommen jedes Buchstaben innerhalb der deutschen Sprache beziffert (siehe Seite 88).

Erstellen der Textvorlage

Das Erstellen solcher Texte geht mithilfe gängiger Office-Programme wie Microsoft Word oder LibreOffice zügig und leicht von der Hand. Dazu wird zunächst die unverschlüsselte Version eingegeben. Anschließend wird die Suchfunktion aufgerufen und der Buchstabe eingetippt, der ersetzt werden soll. Darunter lässt sich das gewünschte Sonderzeichen angeben. Klickt man nun die Taste „Ersetze alle“ (LibreOffice) bzw. „Alle ersetzen“ (Word), ersetzt das Programm automatisch den gewöhnlichen Buchstaben mit dem Sonderzeichen.

Platz	Buchstabe	Relative Häufigkeit
1.	E	17,40%
2.	N	9,78%
3.	I	7,55%
4.	S	7,27%
5.	R	7,00%
6.	A	6,51%
7.	T	6,15%
8.	D	5,08%
9.	H	4,76%
10.	U	4,35%
11.	L	3,44%
12.	C	3,06%
13.	G	3,01%
14.	M	2,53%
15.	O	2,51%
16.	B	1,89%
17.	W	1,89%
18.	F	1,66%
19.	K	1,21%
20.	Z	1,13%
21.	P	0,79%
22.	V	0,67%
23.	ß	0,31%
24.	J	0,27%
25.	Y	0,04%
26.	X	0,03%

Anzahl verschlüsselter Buchstaben

Einer der Knackpunkte dieser Übung stellt die Anzahl der Buchstaben dar, die verschlüsselt werden. Wird der Großteil des Textes im ursprünglichen Zustand belassen, so bietet dies den Vorteil, dass sich mögliche Lösungen schnell durch Einsetzen kontrollieren lassen. Findet ein Schüler beispielsweise ein Wort mit lediglich einem Sonderzeichen, so kann er leicht überprüfen, welcher Buchstabe an dieser Stelle Sinn ergibt. Gleichzeitig lässt sich durch diesen Trick jedoch die eigentliche Wahrscheinlichkeitsanalyse durch bloßes Raten umgehen, wenn derartige Worte zu oft auftreten. Es empfiehlt sich also, eine mittlere Anzahl an Buchstaben zu verschlüsseln.

Hintergründe

Bezug zum Bildungsplan

Durch die Verwendung der Häufigkeitsverteilung knüpft diese Aufgabe an den Themenblock der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, der im Bildungsplan als Leitidee „Daten und Zufall“ auftritt. Es empfiehlt sich beispielsweise, anhand der Häufigkeitstabelle und dem Vorkommen einzelner Buchstaben im Text die Differenzierung von absoluter und relativer Häufigkeit einzuführen. In diesem Zusammenhang lässt sich auch das Gesetz der großen Zahlen erarbeiten, da sich die relative Häufigkeit eines Buchstaben innerhalb des Textes mit zunehmender Länge des Aufsatzes dem Erwartungswert aus der Tabelle annähert.

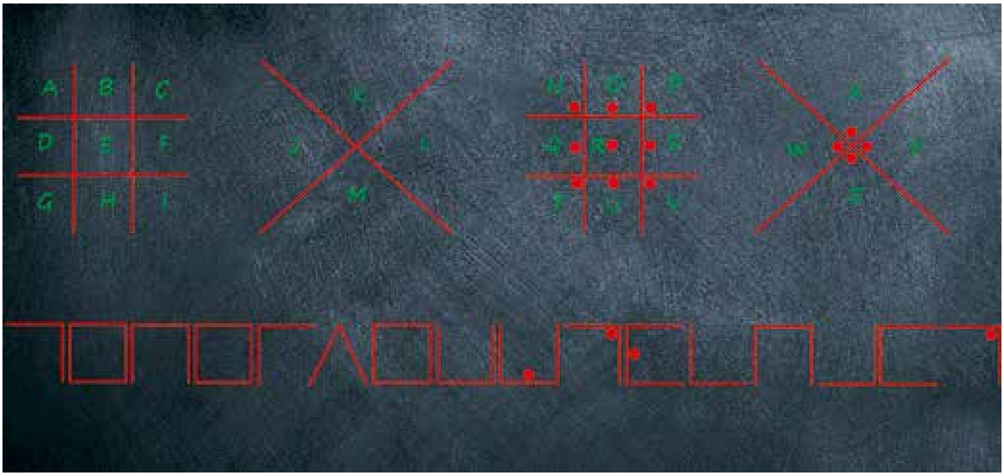
8.5 Der Freimaurercode

Janik Isele

Der aufgrund seiner mystischen Optik besonders ansprechend auf die Schüler wirkende Freimaurercode stellt eine Alternative zur Caesar-Verschlüsselung dar.

Konkrete Umsetzung

Sowohl die geheime Botschaft, als auch die zugehörige Kodierungstabelle werden an der Tafel angebracht. Das restliche Vorgehen verläuft nun analog zur Einführung der Caesar-Verschlüsselung.



Auflösung

Im Unterschied zu Chiffrierungen verwenden Kodierungen keine gewöhnlichen Buchstaben, sondern sonstige Symbole und Zeichen. Der Freimaurercode ersetzt jeden Buchstaben durch die Umrandungslinien die ihn in der Kodierungstabelle umgeben. In der hier verwendeten Version tauchen zusätzlich Punkte auf, die beispielsweise die Unterscheidung der Buchstaben A und N ermöglichen, denen ansonsten dasselbe Symbol zugeordnet würde.

Hintergründe

Mystik

Durch die kryptisch wirkenden Zeichen entsteht zusätzlich zur grundsätzlich gegebenen Motivation, welche auch bei anderen Verschlüsselungsarten vorhanden ist, der Reiz des Unbekannten. Der Name des Freimaurercodes trägt sein Übriges zu diesem Umstand bei, da den Geheimbund eine Aura des Mystischen umgibt.

Vorgabe der Entschlüsselungsregel

Durch das Vorgeben der Kodierungstabelle unterscheidet sich die Verwendung des Freimaurercodes von dem Vorgehen bei der Caesar-Verschlüsselung, da hier das Herausfinden der Botschaft eher einer Fingerübung als einem Rätsel gleicht. Als weiterführende Übung lässt sich jedoch auch das „Knacken“ des Codes einbinden, indem abgewandelte Kodierungstabellen verwendet werden, die den Schülern nicht vorgegeben werden. Lösbar wird diese Aufgabe durch die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsanalyse.

8.6 Die Vigenère-Verschlüsselung

Janik Isele

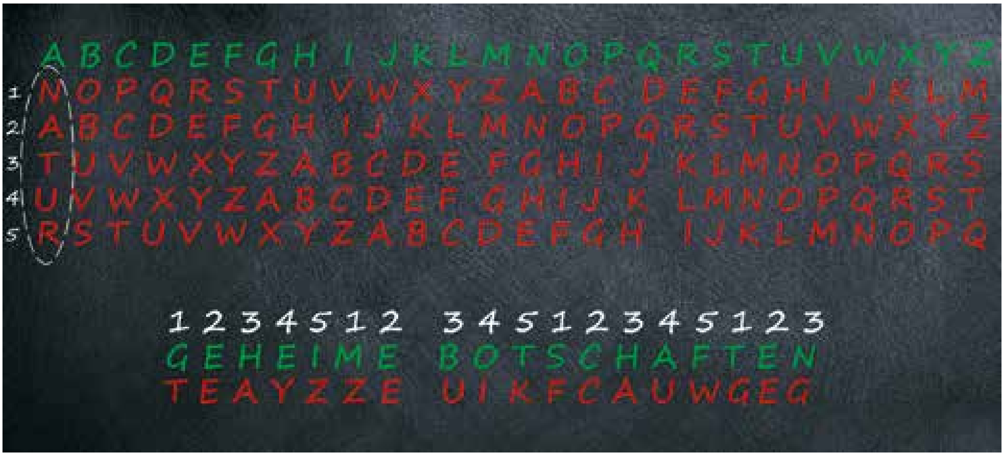
In dieser Übung werden die Schüler erstmals mit einer komplexeren Art der Verschlüsselung konfrontiert.

Konkrete Umsetzung

Den Schülern wird zunächst das Konzept der Vigenère-Verschlüsselung anhand eines Beispiels erläutert. Anschließend verfasst jeder Schüler eine kurze Botschaft und verschlüsselt sie nach dem gelernten Schema. Mithilfe des verwendeten Codeworts knackt nun der Banknachbar die Chiffrierung.

Methode der Verschlüsselung

Die Vigenère-Verschlüsselung basiert auf der von der Caesar-Chiffre bekannten Verschiebung des Alphabets. Dazu wird im ersten Schritt das Alphabet notiert. Wieder wird der Klartext grün geschrieben.



Anschließend wird ein Codewort festgelegt, in unserem Beispiel das Wort „Natur“. Dessen Buchstaben bilden den jeweiligen Anfangsbuchstaben der roten Alphabete. Diese werden so untereinander geschrieben, dass eine eindeutige Zuordnung eines grünen Buchstaben mit je einem Buchstaben aus jedem roten Alphabet möglich ist. Der zu verschlüsselnde Text wird nun durchnummeriert. Dabei wird die höchste Zahl, nach der wieder von vorne begonnen wird, durch die Anzahl der Buchstaben des Codeworts vorgegeben. In diesem Beispiel zählen wir also bis fünf. Die Verschlüsselung funktioniert nun wie die Caesar-Chiffrierung, wobei die Zahl eines Buchstaben das zu verwendende Alphabet vorgibt. Die Vorgehensweise lässt sich anhand der obigen Grafik gut nachvollziehen.

Erweiterung

Der Schwierigkeitsgrad der Entschlüsselung lässt sich in einer weiteren Übung deutlich erhöhen. Dazu wird ein vollständig verschlüsselter Text ausgeteilt, welcher etwa ein DinA4-Blatt füllt. Das Codewort wird in diesem Fall nicht vorgegeben. Mithilfe eines Tricks lässt sich jedoch dessen Länge bestimmen. Dazu wird der Text nach sich wiederholenden Buchstabenkombinationen abgesucht und deren Abstand ausgezählt. Meist handelt es sich dabei in der deutschen Sprache um häufig vorkommende Worte wie „und“, „der“, „die“ oder „das“. Bildet man nun den kleinsten gemeinsamen Teiler aller dieser Abstände, so erhält man die Länge n des Codeworts, da nun wieder das gleiche Alphabet verwendet wird. Diese Zahl gibt also die Periodizität der Verschlüsselung vor.

Im nächsten Schritt werden die Buchstaben des Werkes von Eins bis zur Zahl n durchnummeriert. Nun können alle gleich nummerierten Buchstaben als eigenständiger Text behandelt werden, der sich mithilfe der Wahrscheinlichkeitsanalyse entschlüsseln lässt.

Hintergründe

Durch Komplexität gewonnene Sicherheit

Im Vergleich zu den zuvor kennengelernten Verschlüsselungen, zeichnet sich die Vigenère-Chiffrierung durch ihre wesentlich höhere Sicherheit aus. Durch die Verwendung mehrerer Alphabete werden gleiche Buchstaben im Ausgangstext durch unterschiedliche Buchstaben in der Verschlüsselung repräsentiert, wodurch eine einfache Wahrscheinlichkeitsanalyse nicht zum Ziel führt. Den Schülern wird hier bewusst, dass der zusätzlich betriebene Aufwand lohnenswert ist, da der Schutz gegenüber unbefugten Lesern erheblich steigt.

Der einfachste Weg, die Sicherheit zu erhöhen, ist die Verwendung eines längeren Codewortes. Es wäre gar denkbar, ganze Buchpassagen zu gebrauchen.

Die Länge des zu entschlüsselnden Textes wirkt sich dagegen in die andere Richtung aus: Je länger der Text, desto wahrscheinlicher wird es, viele sich wiederholende Buchstabenkombinationen zu finden und dadurch die Länge des Codewortes zu erhalten. Ein Teil der Komplexität der Vigenère-Chiffrierung besteht darin, dass diese tatsächlich eine Zusammensetzung mehrerer Caesar-Verschlüsselungen darstellt. Genauso gut ließe sich auch der Freimaurercode verwenden. Die Schüler können diesen Gedanken fortführen und verschiedene Verschlüsselungsarten kombinieren, um so eigene, sichere Methoden zu entwickeln. Das Erkennen der Zusammensetzbarkeit stimuliert somit die Kreativität und führt bestenfalls zu einer Art Wettbewerb, in dem die Schüler sich gegenseitig zu übertrumpfen versuchen. Im Zuge dessen ist es vorstellbar, dass sich die Kinder zuhause freiwillig noch intensiver mit dem Inhalt der Unterrichtsstunde beschäftigen, beispielsweise bei der Recherche nach weiterführenden Verschlüsselungsmethoden.

8.5 Exkurs: Moderne Verschlüsselungsverfahren

Simon Studer und Stephan Dierle

Ist es möglich, dass zwei Personen eine geheime Information austauschen, die zuvor weder ein Codewort noch sonst ein Geheimnis miteinander ausgetauscht haben? Die Antwort ist der Schlüssel zu modernen bzw. asymmetrischen Verschlüsselungsverfahren.

Konkrete Umsetzung

Asymmetrische Verschlüsselung

Um die Vigenère-Verschlüsselung schnell entschlüsseln zu können benötigt man das Codewort. Dies zu übermitteln ist jedoch oftmals nicht so einfach, da niemand außer Sender und Empfänger der geheimen Botschaft dieses Schlüsselwort erfahren darf. Es stellt sich also die Frage, ob man auch ohne das Austauschen eines Codewortes verschlüsselte Botschaften übermitteln kann. Stellt man diese Frage den Schülern, so werden die meisten mit „Nein!“ antworten.

Um das Gegenteil zu beweisen, erhält ein Schüler der Klasse ein Schloss, ein zweites behält der Lehrer. Auf einer Karte, die mit diesem Schloss verriegelt werden kann, notiert der Lehrer eine Nachricht und „schickt“ diese an den Schüler mit dem zweiten Schloss. Dieser kann die Nachricht jedoch nicht entschlüsseln, da er kein Schlüssel zum Aufschließen besitzt. Hängt er sein Schloss jedoch ebenfalls an die Karte, so ist sie doppelt gesichert und wird erneut zurückgesendet. Im nächsten Schritt kann der Lehrer sein Schloss entfernen und schickt die Nachricht, die nun nur noch mit dem Schloss des Schülers gesichert ist zurück. Diesem ist es nun möglich die Nachricht zu lesen, ohne dass zuvor ein Codewort oder Schlüssel ausgetauscht wurde. Das Schloss ist im Beispiel als Metapher für eine im Internet verwendete Verschlüsselung durch ein Codewort zu verstehen.

Public Key

Auch hier handelt es sich um eine asymmetrische Verschlüsselung. Das bedeutet, dass der Prozess des Verschlüsselns nicht dem des Entschlüsselns entspricht, da beide Seiten verschiedene Codewörter (Schlüssel) verwenden.

Im Beispiel wird die asymmetrische Verschlüsselung erkennbar, da bei der Verschlüsselung nur das Verschließen des Schlosses (ohne Schlüssel möglich) ausreicht. Zum Entschlüsseln hingegen wird der Schlüssel benötigt.

Eine weitere asymmetrische Verschlüsselung ist die „public-key-Verschlüsselung“.

Dieses Verschlüsselungsverfahren findet im Internet Anwendung. Dabei wird ein öffentlicher Schlüssel, der für alle zugänglich ist, vom späteren Empfänger ausgelegt. Dieser kann schließlich vom Absender verwendet werden, um eine Information zu verschlüsseln. Beim Entschlüsseln durch den Empfänger wird ein anderer geheimer Schlüssel benötigt, um die Information zu dekodieren. Entscheidend ist bei diesem Verfahren, dass nur der Empfänger diesen zweiten Schlüssel besitzt.

Im Alltag begegnet dem Internetnutzer dieses Verschlüsselungsverfahren bei jeder Passworteingabe, beispielsweise bei Internetbanking, E-Mail-Postfach, Facebook etc.

Dem Nutzer wird in diesen Fällen der Schlüssel nicht sichtbar zur Verfügung gestellt, da sich das Verfahren im Hintergrund abspielt.

Hintergründe

Kultureller Hintergrund

Gerade in unserem heutigen Alltag spielen Verschlüsselungen eine immer größer werdende Rolle. Sobald wir beispielsweise im Internet mit der Kreditkarte bezahlen, wollen wir eine sichere Verbindung haben, damit niemand unbefugt auf unsere Kreditkarte zugreifen kann. Dies wird durch eine verschlüsselte Datenkommunikation gewährleistet. Verschlüsselungen treten in vielen weiteren Kontexten auf, so zum Beispiel wie oben erwähnt (public-key) bei Bankautomaten, persönlichen E-Mails und vielem mehr.

Pädagogischer Hintergrund

Durch die weit verbreitete Anwendung von Verschlüsselungsverfahren lässt sich schon erahnen, wie wichtig das Thema der Kryptographie für die Sicherheit unserer Daten geworden ist. Die Schüler werden durch diese Übung für die Notwendigkeit der Verschlüsselung sensibilisiert.

Mathematischer Hintergrund

Das Ver- und Entschlüsseln beim „public-key-Verfahren“ sind zwei voneinander unabhängige Vorgänge, die unterschiedliche Schwierigkeitsgrade zur Dekodierung erfordern. Zur Umsetzung wird eine mathematische „Einbahnstraße“ benötigt: Aktuell geschieht das mithilfe von Primfaktoren. Es ist denkbar einfach zwei große Primzahlen zu multiplizieren, wie die beiden Primzahlen 97 und 61, was einer Verschlüsselung entspricht.

Im Gegensatz dazu ist es ungleich schwieriger, die Zahl 5917 in Primfaktoren zu zerlegen. Dies entspricht der Entschlüsselung. Um eine Zahl wie 5917 in Primfaktoren zu zerlegen, bleibt einem nichts anderes übrig, als Primzahl für Primzahl zu testen.

9 Handlungsorientierte Beispiele

9.1 Das Gegenereignis am Beispiel Geburtstagsparadoxon

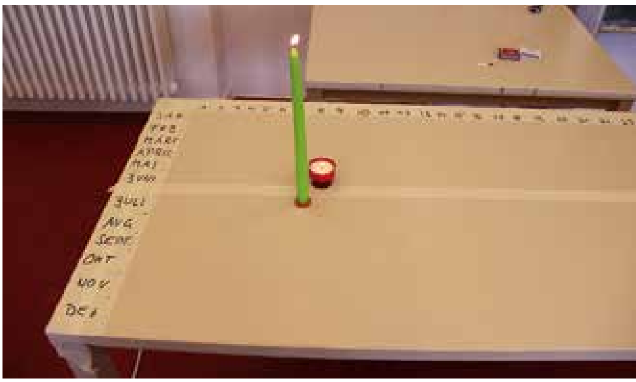
Marc Heckl

Die Betrachtung des Gegenereignisses stellt in der Stochastik oftmals eine Erleichterung eines mathematischen Problems dar. Im Folgenden soll eine mögliche Herangehensweise beschrieben werden. Das Geburtstagsparadoxon beschreibt das Problem, dass Wahrscheinlichkeiten intuitiv falsch eingeschätzt werden: die Wahrscheinlichkeit, dass zum Beispiel innerhalb einer Schulklasse zwei Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben, wird allgemein für viel geringer gehalten, als sie es tatsächlich ist.

Konkrete Umsetzung

„Der Kerzenkalender"

Die Schüler bringen in die Schulstunde eine Kerze von daheim mit. Vor der Stunde bereitet der Lehrer einen großen Kalender mit Monatsnamen und Tageszahlen vor (z. B. mit einem Kreppband auf einem Tisch, wie in der Abbildung dargestellt).



Zunächst lässt man die Schüler untereinander diskutieren, wie groß denn die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens zwei Personen im Klassenzimmer am gleichen Tag Geburtstag haben. Im Folgenden werden die Schätzungen an der Tafel gesammelt. Nun wollen die Schüler sicher wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist. Hierzu kommen die Schüler nach dem Zug-um-Zug-Prinzip mit ihren Kerzen zum Kalender und legen diese an

die Seite ohne das Geburtstagsdatum zu verraten. Dabei sagen sie laut, wie viele Möglichkeiten sie noch haben, ihre Kerze auf ein freies Feld zu setzen. Anschließend notieren sie an der Tafel die Wahrscheinlichkeit, mit der sie ein freies Feld mit der eigenen Kerze besetzen. Zur Auflösung der ursprünglichen Frage wird das Gegenereignis berechnet.
Beispielrechnung:

$$P(\textit{treffe leeres Feld}) = \frac{\text{Anzahl der noch nicht belegten Felder}}{\text{Gesamtzahl der Felder}}$$

$$P(\textit{kein Feld doppelt besetzt}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - k}{365}$$

k stellt hierbei die Schülerzahl dar.

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun über das Gegenereignis:

$P(\textit{Mindestens 2 Schüler haben am gleichen Tag Geburtstag})$
$= 1 - P(\textit{kein Feld doppelt besetzt})$

Bei einer Schulklasse von 23 Schülern beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben, nach obiger Rechnung ca. 50%.

Beträgt die Schülerzahl hingegen 30, so erhöht sich diese Wahrscheinlichkeit auf ca. 70%

Hintergründe

Warum positionieren die Schüler ihre Kerzen einzeln?

Wir verwenden das Zug-um-Zug-Prinzip, um die mathematische Entwicklung sichtbar zu machen. Die Schüler erkennen so den Zusammenhang zwischen der mathematischen Formulierung und dem zu Grunde liegenden Problem besser.

Warum legen die Schüler die Kerzen neben den Kalender und nicht direkt auf ihren Geburtstag?

Wir vermeiden dadurch das zufällige Ereignis, dass zwei Schüler zu Beginn am gleichen Tag Geburtstag haben und somit der mathematische Rechenweg nicht nachvollziehbar entwickelt werden kann.

Direkte Verbindung zwischen Handeln und Mathematik

Das Positionieren der eigenen Kerze und die damit verbundenen Überlegungen finden auf verschiedenen Ebenen statt. Zunächst einmal die handelnde Ebene in welcher der Schüler seine Kerze auf dem Tisch platziert. Anschließend wird durch das

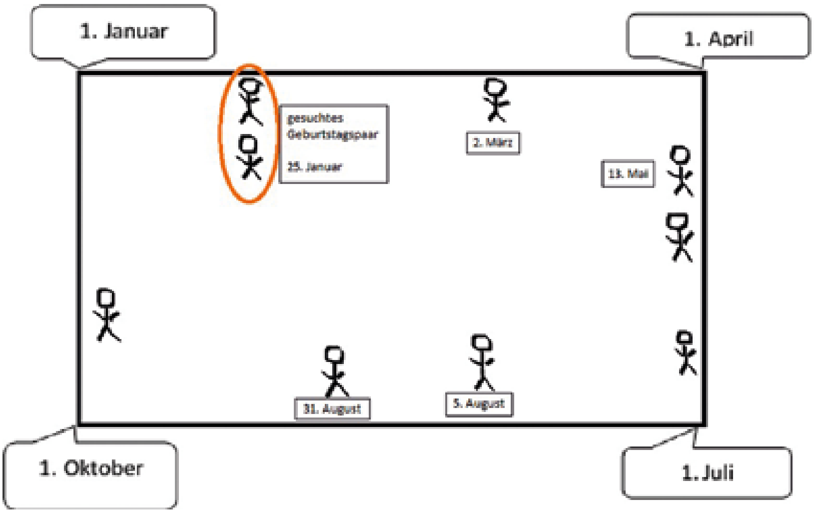
Anschreiben der Wahrscheinlichkeit die direkte Verbindung zu den mathematischen Inhalten formal gefördert.

Der Kerzenkalender liefert des Weiteren eine gemütliche Atmosphäre und kann speziell in der Weihnachtszeit zu einer fröhlichen Stimmung führen.

Alternative Auflösung der Frage

Konkrete Umsetzung

Die Fragestellung bleibt im Vergleich zum „Kerzenkalender" gleich: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler einer Klasse am gleichen Tag Geburtstag haben? Als „Kalender" wird nun das Klassenzimmer benutzt. Hierzu werden die einzelnen Ecken mit 1. Januar, 1. April, 1. Juli und 1. Oktober kodiert. Die Aufgabe der Schüler besteht nun darin, sich an den Wänden so zu platzieren, dass ihre Geburtstage chronologisch angeordnet sind. Haben zwei Schüler das gleiche Geburtsdatum, so stellen sie sich nicht nebeneinander, sondern hintereinander. So wird sichtbar, dass hier ein gesuchtes Geburtstagspaar gefunden wurde.



Hintergründe

Klassenwahrnehmung

Die Position im Klassenzimmer lässt einen völlig neuen Blickwinkel auf das Klassengefüge zu. Die Schüler stehen durch die Anordnung im Klassenzimmer unabhängig von der Beziehungsstruktur der Klasse nebeneinander. Infolgedessen lernt sich die Klasse auf andere Art und Weise kennen.

Diese Methode eignet sich auch gut als Kennenlernspiel, wenn Klassen neu zusammengestellt werden. Ein weiterer Diskussionspunkt kann eine eventuelle Clusterbildung durch Häufungspunkte der Geburtsdaten bieten.

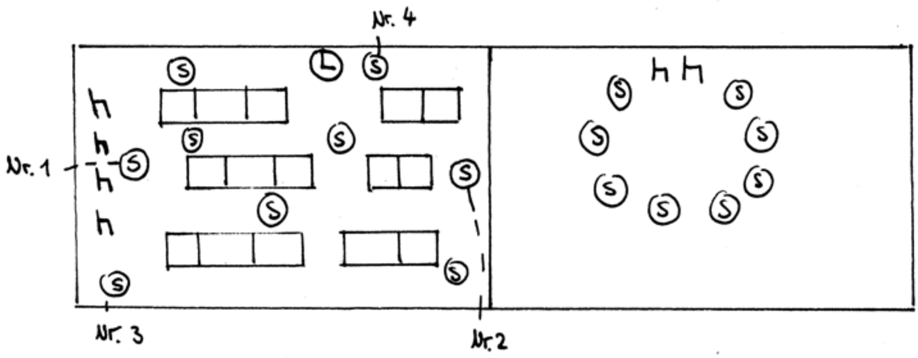
9.1 Wir spielen Lotto

Rebekka Isak

Das Klassenzimmer wird zur Lostrommel und die Schüler zu Lottokugeln. So wird einem stochastischen Experiment Leben eingehaucht und Wahrscheinlichkeitsrechnung hautnah erlebt.

Konkrete Umsetzung

Auf einer Raumseite werden vier Stühle in einer Reihe nebeneinander gestellt, ansonsten wird das Klassenzimmer derart umgestaltet, dass ein Durchlaufen problemlos möglich ist.



Im Folgenden wird mit einer Schulkasse, bestehend aus 32 Personen, das Lotto „4 aus 32" gespielt. Zunächst wird durchgezählt und jeder Schüler bekommt eine Nummer von 1 bis 32, die er sich merken muss. Nach zufälligen Kriterien (z. B. die am weitesten weg vom Lehrer stehende Person) wird ein Schüler ausgewählt, der sich auf den ersten Stuhl setzt. Dabei nennt er laut seine Nummer.

Nach vier Runden sind alle Stühle besetzt und an der Tafel kann nun die Wahrscheinlichkeit für das Lottospiel berechnet werden. Dazu wird zuerst die Anzahl aller möglichen Fälle berechnet.

Um die Berechnung 32·31·30·29 zu begründen, werden die möglichen Fälle bei einer Ziehung von nur zwei Kugeln durchgespielt. Dazu stellen sich die Schüler in einem Kreis auf, in den auch zwei leere Stühle gestellt werden. Ein Schüler setzt sich auf einen der beiden Stühle und bleibt auf diesem sitzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den zweiten Stuhl zu besetzen? Die Schüler setzen sich nacheinander jeweils kurz auf den noch freien Stuhl (siehe Foto auf der nächsten Seite) und zählen laut mit. So wird insgesamt auf 31 gezählt. Diese Zahl wird auf der Tafel notiert. Nun steht auch der Schüler, der sich als erster setzt, wieder auf und der Prozess wird noch einmal mit einem anderen Schüler wiederholt. Wieder wird auf 31 gezählt. An der Tafel wird nun 31 zu 31 addiert. Nach wenigen Durchläufen erkennen die Schüler, dass sie 32 mal auf 31 zählen müssen, und es also 32 mal 31 Möglichkeiten gibt, die beiden Stühle zu besetzten.

Somit kann begründet werden, warum die Anzahl der Möglichkeiten beim Lotto „4 aus 32“ genau $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863040$ beträgt. Wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt, erhält man also $\frac{1}{863040}$ als Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Ziffernfolge gezogen wird.

Beim Lottospiel kommt es aber nicht auf die Reihenfolge der Ziehung an. Um herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, vier Stühle mit vier Personen zu besetzen, stellen sich vier Schüler vor die Stühle. Der erste Schüler hat vier verschiedene Möglichkeiten sich zu setzen, der zweite hat nur noch drei Möglichkeiten, der dritte nur noch zwei und der vierte schließlich nur noch eine Möglichkeit sich zu setzen. Somit gibt es also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit, 4 Ziffern aus 32 zu ziehen, beträgt also $\frac{24}{863040}$.

Hintergründe

Schüler als Lottokugeln

Bei einem stochastischen Experiment nehmen die Schüler oft nur eine beobachtende Position ein. Werden die Schüler selbst zu Lottokugeln, kommt Bewegung in den Unterricht. Die Schüler werden selbst aktiv. So wird ein Interesse an der Lösung geweckt und durch das eigene Erleben prägt sich das Experiment besser ein.

Plus oder Mal, das ist nicht egal

Intuitiv wird die Frage, wie viele Möglichkeiten es bei einem stochastischen Experiment gibt, oft falsch beantwortet. So wird zwischen die 32 und 31 oft ein Plus- statt einem Malzeichen gesetzt. Um die Anzahl der Möglichkeiten „erlebbar“ zu machen, wird sie durch einfaches Zählen berechnet. Die Schüler bekommen somit ein Gefühl, wie groß die Anzahl an Möglichkeiten tatsächlich ist.

10 Verteilungen

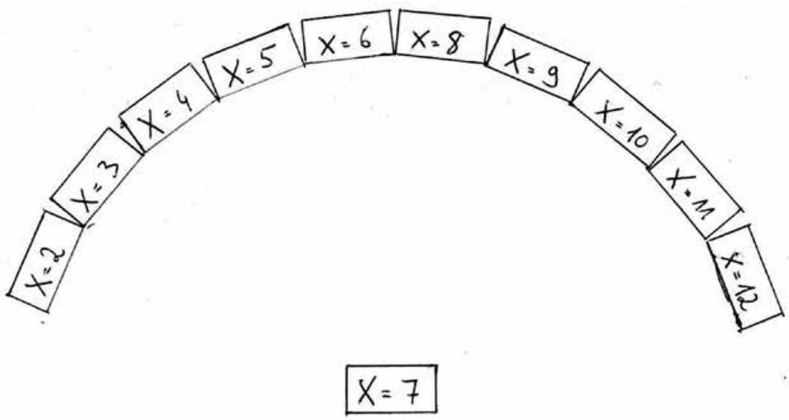
10.1 Eine spielerische Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Thomas Ahner

Eine einfache Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht einzuführen, besteht in der Durchführung eines Würfelspiels, bei dem die Schüler einen kleinen materiellen und einen großen Lerngewinn erzielen können.

Konkrete Umsetzung

Der Raum wird entsprechend der nebenstehenden Skizze, die der Lehrer an die Tafel zeichnet, umgestaltet. Hierbei gilt das Pult als Mittelpunkt, um das herum ein Tischhalbkreis aus 10 Tischen gestellt wird. Die restlichen Tische werden an den Rand gestellt. Der Lehrer wählt nun aus den Schülern zwei „Glücksfeen“ aus, wel-



che sich zum Pult begeben und der Klasse zugewandt auf zwei Stühlen sitzen. Sie erhalten jeweils einen verschiedenfarbigen 6-seitigen Würfel. Der Rest der Klasse verteilt sich nun möglichst gleich auf die 10 anderen Tische und blickt in Richtung Pult.

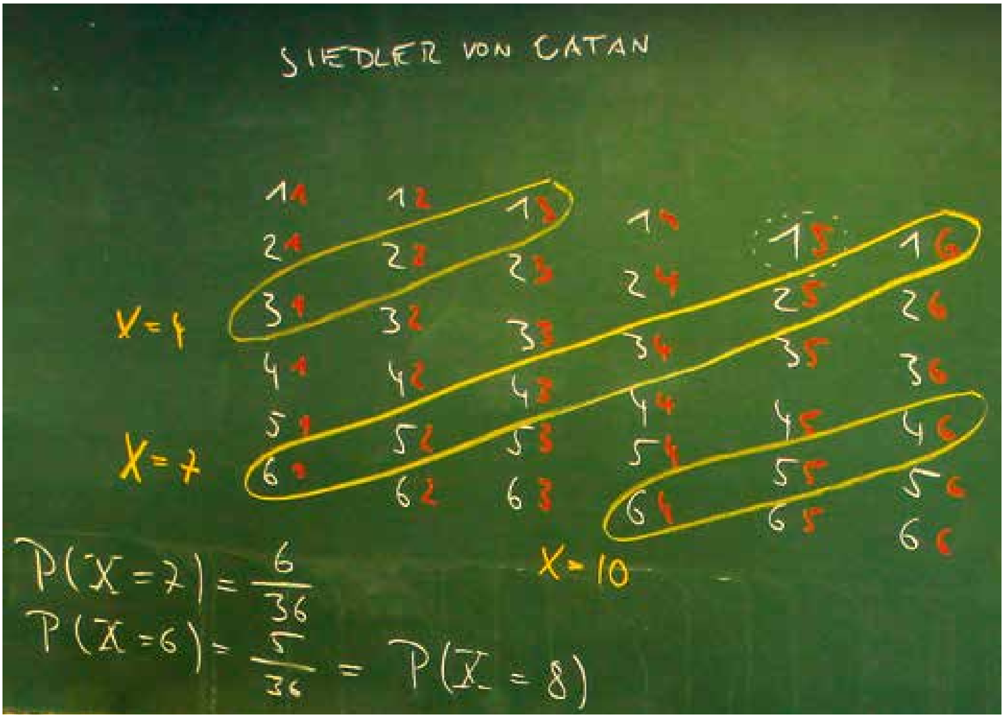
Der Lehrer verteilt der Reihe nach von 2 bis 12 durchnummerierte Kärtchen auf die Tische; das Pult erhält die Nummer 7. Nun beginnt das Spiel: die „Glücksfeen“ würfeln jeweils und rufen laut die Summe ihrer beiden Würfe. Der Lehrer verteilt einen Gewinn an den Tisch, dessen Nummer gewürfelt wurde. Als Gewinne eignen sich kleine Süßigkeiten wie beispielsweise Gummibärchen. Der Gewinn besteht stets aus so vielen Gummibärchen, wie Schüler am Tisch sitzen. Eines davon wird auf die Nummernkarte gelegt, aber auch der Rest wird noch nicht gegessen. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis alle Süßigkeiten ausgeteilt worden sind.

Die Schüler bringen ihr Nummernkärtchen mit den darauf befindlichen Süßigkeiten nach vorne zum Pult und ordnen sie nach der Reihenfolge der Nummern. Bereits während des Spiels wird die Ungerechtigkeit der Verteilung für die Schüler erfahrbar. Nun ist diese Ungerechtigkeit auch optisch messbar: die Verteilung am Tisch ist im Allgemeinen so, dass die mittleren Zahlen öfter als die niedrigen und hohen Zahlen getroffen werden. Als Ergebnissicherung des Spiels eignet sich eine Fotografie des Tisches, welche ins Matheheft eingeklebt wird.

Das für die Schüler überraschende Ergebnis wird nun dazu genutzt, stochastische Begriffe wie Verteilungen und Zufallsvariablen einzuführen. Dazu nutzt der Lehrer

die unterschiedlichen Farben der Würfel und zeichnet eine Tabelle. In dieser werden zuerst in der Farbe des ersten Würfels in 6 Spalten jeweils die Zahlen von 1 bis 6 eingetragen werden. Danach werden hinter diese Einträge jeweils die Zahlen von 1 bis 6 mit der Farbe des zweiten Würfels eingetragen. Es ergibt sich eine Tabelle mit 36 Einträgen, in denen alle möglichen Elementarereignisse mit 2 Würfeln unter Beachtung der Reihenfolge stehen. Fragt man die Schüler nun, welche der Kombinationen in der Summe eine unbestimmte Zahl zwischen 2 und 12 ergeben, erkennen sie schnell das dahinterliegende Muster: die Zahlen mit gleicher Summe der Augenzahlen stehen in je einer Diagonalen. Weiterhin erkennen sie, dass die 7 mit sechs Möglichkeiten am häufigsten gewürfelt wird, während beispielsweise die 4 und die 10 nur von jeweils drei Kombinationen erwürfelt werden können.

Hier kann man bereits die Begriffe wie Zufallsvariable und Ereignis einführen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt – hier die Augensumme zweier Würfel – ergibt sich durch Division der eintretenden günstigen Ereignisse durch die Zahl der möglichen Ereignisse: $\frac{|X|}{|\Omega|}$. Dies ist am Tafelbild anschaulich erklärt. Auch Verteilungen können gut erklärt werden: die Ergebnisse sind symmetrisch verteilt, $P(X=6)$ beispielsweise ist gleich wahrscheinlich wie $P(X=8)$, jedoch nicht Laplace-verteilt.



Hintergründe

Siedler von Catan

Durch die spielerische Komponente ist es möglich, mitten in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzusteigen. Gleichzeitig werden die formalen Begriffe mathematisch motiviert. Dies stellt eine positive Alternative zum analytischen Erlernen des Unterrichtsstoffes dar[16]. Zudem gibt es einen kulturellen Hintergrund zur Tabelle an der Tafel: Beim bekannten Strategiespiel „Siedler von Catan“ deutet die Größe der Beschriftungen der Chips auch auf die hier ebenfalls angewandten Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Würfelwürfe hin.

Motivation durch Emotion

Im Laufe des Spiels werden innerhalb der Klasse Emotionen geweckt: Schüler, deren Zahl häufig gewürfelt wird, freuen sich, während Schüler, deren Zahl nicht gewürfelt wird, Betrug vermuten und diesen lauthals äußern. Unter Verdacht stehen die Glücksfeen, da diese durch die 7 am wahrscheinlichsten gewinnen und ja zugleich noch würfeln. Es scheint, als würden sie auf das Ergebnis Einfluss nehmen.

16 Der interessierte Leser sei auf Wagenschein, Martin: Verstehen lehren. genetisch – sokratisch – exemplarisch. Weinheim, 1975 verwiesen.

Das soziale Gefüge der Klasse wird gestützt

Nachdem die Schüler gemeinsam erarbeitet haben, warum die Gewinne aus mathematischen Gründen nicht fair auf alle verteilt wurden, schlägt der Lehrer den Schülern vor, die Süßigkeiten gerecht unter allen aufzuteilen. Die Schüler reflektieren über den Begriff der Fairness und teilen die Süßigkeiten unter sich auf, so dass kein Schüler übergangen wird. Hierzu wird eine klare Anleitung des Lehrers benötigt. Die Süßigkeiten belohnen kein gutes oder schlechtes Spiel im Sinne einer „Bonbon-Pädagogik“, bei der Willkür belohnt wird, sondern sind Teil des Spiels. Für den Lehrer gilt es, auf die Situation vorbereitet zu sein, dass manche Schüler aus religiösen oder ethischen Gründen keine Gummibärchen essen dürfen.

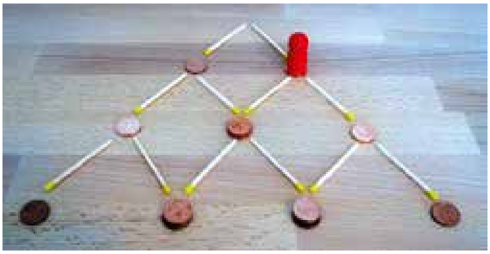
10.2 Mit Münzen und Streichhölzern zur Binomialverteilung

Alisa Müll, Oliver Reim und Fabian Zimmerer

Im folgenden Abschnitt wird eine Einführung von Binomialkoeffizienten und der Binomialverteilung beschrieben.

Konkrete Umsetzung

Phase 1



Der Lehrer beginnt exemplarisch mit einer Spielfigur auf dem Lehrerpult. Durch einen Münzwurf wird entschieden, in welche Richtung sich die Figur fortbewegt. Zwei Streichhölzer markieren die möglichen Wege, an deren Enden zwei Münzen gelegt werden. Die linke Münze zeigt mit der Zahl nach oben, während bei der rechten Münze die Kopfseite sichtbar ist, was die Ausgänge des Münzwurfes symbolisiert. Im nächsten Schritt werden von beiden Münzen ausgehend alle weiteren Wege entsprechend mit Streichhölzern und Münzen gelegt, sodass eine Art Wegdiagramm entsteht.

In der Mitte der zweiten Zeile liegen nun zwei Münzen übereinander, wodurch die Anzahl der verschiedenen Wege für diesen Ausgang ausgedrückt wird. Der Lehrer legt die dritte Zeile, in der bereits die Binomialverteilung durch die Münzstapel deutlich wird (1 – 3 – 3 – 1), und zeigt mit der Spielfigur die verschiedenen Wege, um die Münzen in der dritten Zeile zu erreichen.

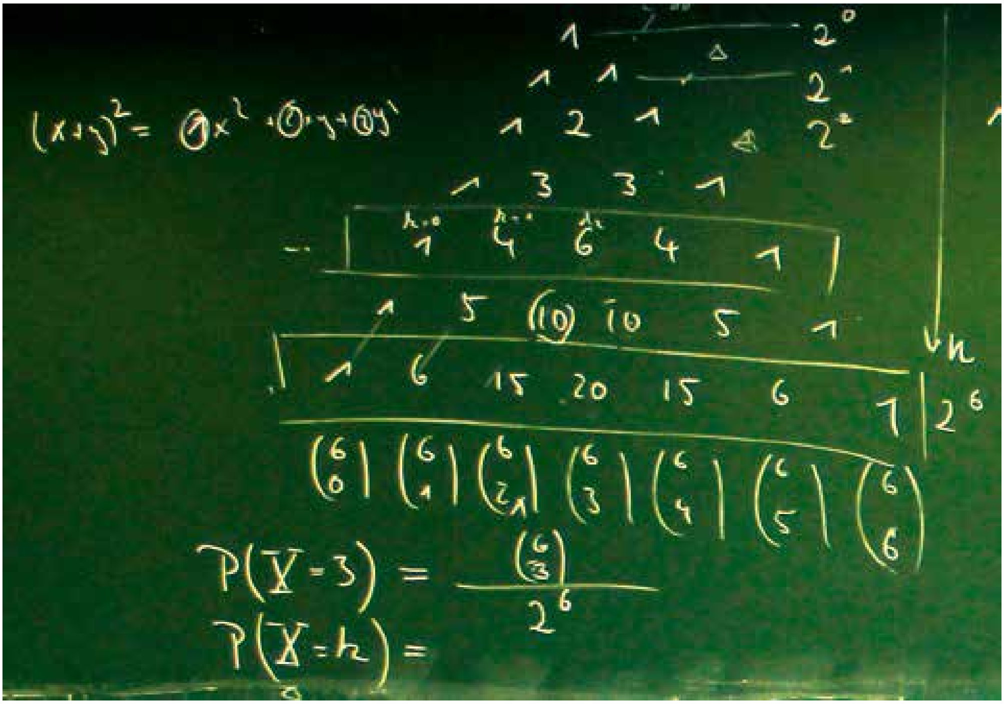
Die Schüler bekommen die Aufgabe, diese Konstruktion in den Farbgruppen bis zur sechsten Zeile selbst zu bauen.

Im Lehrer-Schüler-Gespräch folgt der Übertrag der entstandenen Münzverteilung an die Tafel. Es entsteht das Pascalsche Dreieck mit k Spalten und n Zeilen für n = 6. Wichtig für die Schüler ist das Verständnis des Zusammenhangs zwischen den Einträgen im Pascalschen Dreieck und dem Münzstapel, bzw. der Anzahl der möglichen Wege, was im folgenden Abschnitt ausführlicher behandelt wird.

Phase 2

Um vom Pascalschen Dreieck zur Binomialverteilung für $p = 0{,}5$ zu kommen, stellt der Lehrer den Schülern die Frage, wie viel Geld denn nun eigentlich insgesamt vor ihnen liegt. Dies lässt sich am einfachsten berechnen, indem sich die Schüler überlegen, wie viele Münzen in einer einzelnen Zeile liegen. Hierbei lässt sich erkennen, dass sich in der n-ten Zeile genau $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ Münzen befinden. Damit gilt also, dass bis zur n-ten Zeile genauso viele Münzen zu finden sind, wie allein in der nachfolgenden Zeile, abzüglich 2, da der Startpunkt in dieser Konstruktion keine Münze erhält.

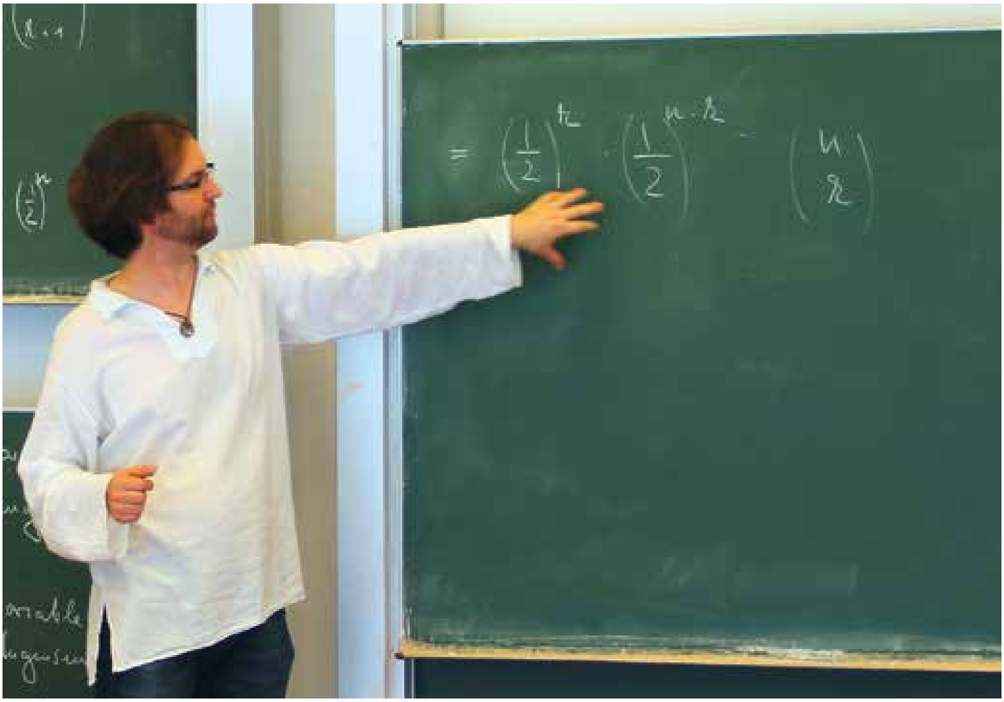
Betrachten die Schüler also das vor ihnen liegende sechsstufige Pascalsche Dreieck, so stellen sie fest, dass es aus genau $2^7 - 1 - 1 = 126$ Münzen besteht. Im nächsten Schritt stellt der Lehrer die Spielfigur auf einen beliebigen Münzstapel in der sechsten Zeile. Aus Phase 1 ist bekannt, dass die Anzahl der möglichen Pfade zur Spielfigur der Anzahl der Münzen bzw. des Binomialkoeffizienten entspricht.



Um einen bestimmten Punkt zu treffen, muss die Figur immer gleich häufig nach rechts (untere Zahl im Binomialkoeffizienten) hüpfen. Welchen Pfad sie auch immer wählt, sie muss z. B. um das „Feld“ $\binom{4}{2}$ zu erreichen, auf ihrem Weg genau zweimal nach rechts hüpfen. Das Pascalsche Dreieck lässt sich somit auch in Binomialkoeffizienten schreiben.

Nun gilt es, die beiden Überlegungen zur Anzahl der Münzen und zum Binomialkoeffizienten zusammenzubringen, um somit schließlich die Formel zur Binomialverteilung herzuleiten. Dafür betrachten die Schüler zuerst das konkrete Beispiel dreimal „nach links hüpfen“, beziehungsweise dreimal „Kopf“, bei sechs Münzwürfen. Um dieses Zufallsereignis zu veranschaulichen, ist es auch hier wieder sinnvoll, die Spielfigur auf den entsprechenden Münzstapel in der sechsten Zeile zu setzen.

Die Fragestellung lautet demzufolge: Wie wahrscheinlich ist es, dass die Spielfigur nach 6 Münzwürfen genau auf diesem Münzstapel landet? Oder mit anderen Worten: Wie wahrscheinlich ist es, bei sechs Münzwürfen dreimal Kopf zu werfen? Die Schüler kennen bereits die Laplace-Wahrscheinlichkeit und wissen damit, dass es nötig ist, sowohl die Anzahl der für das Ereignis günstigen Möglichkeiten, als auch die Anzahl aller Möglichkeiten zu berechnen. Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten entspricht der Anzahl der Pfade, mit denen man vom Startpunkt zur Spielfigur gelangt und lässt sich mithilfe des dazugehörigen Binomialkoeffizienten $\binom{6}{3}$ ange-



ben. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten wiederum entspricht der Anzahl der Münzen in der sechsten Zeile, also 2^6.

Dies ergibt also: $P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}}{2^6}$. Nachfolgend lässt sich die allgemeine Binomialverteilung für p = 0,5 aufstellen.

Hintergründe

Verbindung verschiedener Teilgebiete der Mathematik

Die Unterrichtseinheit bietet eine tolle Möglichkeit, verschiedene Teilgebiete der Mathematik miteinander zu verknüpfen. So werden sowohl Ergebnisse der Geometrie als auch der Arithmetik verwenden, um schließlich ein Resultat der Stochastik – die Binomialverteilung – herzuleiten.

Über die Darstellung des Pascalschen Dreiecks und des Sierpinski-Dreiecks werden verschiedene Mengen wie Dreieckszahlen, Tetraederzahlen und Fibonaccizahlen behandelt. Ebenso wird durch die Anzahl der Münzen (pro Zeile) das exponentielle Wachstum thematisiert. In der zweiten Zeile des Pascalschen Dreiecks (1 – 2 – 1) entdecken die Schüler die Koeffizienten der ersten und zweiten Binomischen Formel: $(x + y)^2 = 1\,x^2 + 2xy + 1y^2$.

Stundenaufbau nach dem E-I-S-Prinzip

Die Nachhaltigkeit des vermittelten Themas wird durch die Verwendung des E-I-S-Prinzips unterstützt. Nachdem die Schüler die Binomialverteilung durch die Konstruktion aus Streichhölzern und Münzen enaktiv erlebt haben und einen haptischen Zugang zu diesem Thema erhalten, erfolgt der ikonische Übertrag an die Tafel beziehungsweise in das Schulheft. Die symbolische Fixierung der Formel für Binomialkoeffizienten erfüllt den formalen Teil des Prinzips.

Im Verlauf der Stunde wächst ein Verständnis für die Binomialverteilung heran, welches den Schülern einen ganz anderen Zugang ermöglicht, als die einfache Konfrontation mit dem Thema und den zugehörigen Formeln.

Vom Konkreten zum Allgemeinen

Die Schüler betrachten jeweils zuerst konkrete Beispiele und versuchen für diese Lösungen zu finden. Erst ganz am Schluss wird ein allgemeiner Zusammenhang der Probleme erkannt. Das Allgemeine wird also durch Betrachten eines Einzelfalles erkannt und erschlossen. Dies hat den großen Vorteil, dass die Schüler selbst den Verallgemeinerungsprozess nachvollziehen und sich dieser und die daraus resultierenden Gesetzmäßigkeiten besser einprägen können. Die Fähigkeit zum Abstrahieren wird somit gefördert.

Index